Rui Miguel de Figueiredo Almeida

Licenciatura em Matemática

O PAPEL DAS TECNOLOGIAS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA EM ALUNOS COM SÍNDROME DE ASPERGER – ESTUDO DE CASO

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Prof. Dr. António Domingos, FCT, UNL

Júri:

Presidente: Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos, Professora Associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Vogais: Doutora Isolina Rosa Pereira de Oliveira, Professora Auxiliar da Universidade Aberta

Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

setembro 2012

Rui Miguel de Figueiredo Almeida

O PAPEL DAS TECNOLOGIAS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA EM ALUNO COM SÍNDROME DE ASPERGER – ESTUDO DE CASO

Tese apresentada para a obtenção de grau de Mestre em Matemática – Formação Educacional pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, sob a orientação do Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

LISBOA

SETEMBRO 2012

"Conseguirá a Humanidade, num grande estremecimento de todo o seu imenso corpo, tomar finalmente consciência de si mesma, revelar a si própria a sua alma coletiva, feita do desenvolvimento ao máximo, pela cultura, da personalidade de todos os seus membros?"

(Caraça)

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, meu orientador, pela disponibilidade manifestada para acompanhar este trabalho, apoiando a escolha do tema, fazendo uma leitura atenta e questionando permanentemente as minhas conclusões, levando ao processo de reflexão fundamental para as conclusões deste trabalho.

Aos colegas da Universidade Nova de Lisboa, e em particular à colega Regina, sem os quais não teria conseguido fazer uma pesquisa cuidada e assertiva sobre o tema em estudo.

À Escola Profissional Bento de Jesus Caraça, que contribuiu financeiramente e permitiu que este trabalho fosse possível de realizar.

Às colegas de trabalho Sandra Sampaio e Elizabete Saragoça as quais prestaram uma ajuda fundamental na elaboração deste trabalho.

Ao aluno e sua família, por me permitirem realizar a investigação, participando nas atividades propostas em sala de aula.

Aos colegas de turma do aluno, que permitiram a implementação das atividades de investigação, durante o período de aula.

Às instituições e pessoas que disponibilizaram a informação necessária para o tratamento da informação utilizada neste trabalho.

Aos meus escoteiros que me dispensaram várias vezes das atividades, permitindo que este trabalho fosse investigado e realizado.

Por último, mas não menos importante, aos meus filhos e à minha mulher, que foram incansáveis no apoio que me deram.

SUMÁRIO

O presente trabalho tem como principal objetivo tentar compreender o impacto que a utilização da calculadora gráfica tem na aprendizagem da matemática num aluno com necessidades educativas especiais do espectro do autismo, portador de Síndrome de Asperger, sendo este um estudo de caso. Pretende-se ainda caracterizar novas metodologias de ensino, em situações de acompanhamento de alunos com necessidades educativas especiais e alargar o debate deste tema à comunidade científica e educacional.

É feita uma abordagem teórica sobre vários temas, no que diz respeito ao autismo, à motivação para a aprendizagem da matemática, às funções, à modelação, ao contributo das calculadoras gráficas como instrumento matemático e à génese instrumental.

O estudo tem por base uma metodologia de natureza qualitativa, assente num estudo de caso, baseado em dados recolhidos durante a realização de atividades propostas.

Num período anterior à implementação das atividades, a calculadora gráfica foi utilizada e explorada pelo aluno, permitindo uma melhor implementação da mesma durante o processo de recolha de dados.

Da análise de dados, observa-se em ação a génese instrumental, visto que o aluno consegue compreender as potencialidades da calculadora gráfica e como as pode utilizar em seu proveito, na resolução das atividades propostas.

Como conclusão, é possível verificar que o aluno consegue dominar o uso da calculadora, o que lhe permite entender e manipular conceitos como a monotonia de funções, assintotas e domínios.

Palavras-Chave: Calculadora Gráfica; Autismo; Asperger; Ensino Profissional;

ABSTRACT

The main goal of this paper is to try to understand the impact of the use of the graphic calculator in learning Mathematics by a student with special needs in the spectrum of autism, bearer of the Asperger Syndrome. This is a case study. It is also intended to characterize new teaching methodologies and to widen the debate of this theme to the scientific and educational communities.

There is a theoretical approach on several themes such as motivation to learn Mathematics, mathematical functions, modulation and the contribution of graphic calculators as a mathematical instrument and instrumental genesis in what concerns autism.

The research is based on a qualitative methodology applied to a case study.

The study is based on data gathered during the resolution of the activities presented for analysis. Before implementing the activities the graphic calculator was used and explored by the student allowing for its better usage while gathering the data.

In the data analysis one can observe the instrumental genesis since the student is able to understand the graphic calculator's potential and how to use it for his own benefit in the resolution of the presented activities. The use and exploration of the calculator allows him to understand and manipulate concepts such as functions' monotony, asymptotes and domains.

KEY WORDS: Graphic calculator; Autism; Asperger Syndrome; Vocational Teaching

Índice

Índice de Ilustrações

Índice de Tabelas

Capítulo 1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são primeiramente apresentados os motivos, os objetivos e as questões que fundamentam a escolha do tema.
No segundo momento, é feita uma descrição sumária da organização deste trabalho.

1.1. Motivos da escolha do tema

Não foi há muito tempo que o investigador se deparou com um desafio do qual nada sabia como ultrapassar. A escola onde trabalha admitiu quase há dois anos um aluno com necessidades educativas especiais, apresentando uma doença do foro neurológico – Síndrome de Asperger.
O investigador ainda se lembra do primeiro dia de aulas, onde o aluno, apenas falou quando questionado diretamente e usando monossílabos quase impercetíveis pela linguagem pouco desenvolvida que revelava. Foi uma aula de grande frustração, pois não se sentiu à altura do desafio que enfrentara.
Assim que chegou a casa, pesquisou sobre a doença e sobre metodologias aplicáveis a alunos com esta deficiência, no intuito de superar as dificuldades sentidas. É da sua opinião que numa situação destas, o professor é responsável em atualizar as suas competências e metodologias para ultrapassar as barreiras que são impostas por tal desafio.
No entanto, o investigador tem a sorte de viver com uma pessoa que já tinha trabalhado com jovens com o mesmo tipo de necessidades. Assim, optou em pedir ajuda à sua esposa, a qual exerce cargo de Coordenadora Pedagógica na Instituição da Sagrada Família do Miratejo, sendo educadora de infância, conhece, por isso situações idênticas, mas a um nível de aprendizagem diferente. Aconselhou-o a trabalhar na base das cores e figuras, as quais se revelam mais apelativas, sendo assim facilitadoras do processo de abstração inerente à disciplina. Assim o fez, tendo dado resultados positivos e hoje é possível afirmar com convicção que todas as aulas são um desafio e uma mútua aprendizagem entre o investigador e o aluno.

1.2. Objetivos e questões

O estudo levado a cabo neste trabalho será na área das aplicações das novas tecnologias na aprendizagem da matemática, especificamente em alunos com Síndrome de Asperger.

Sendo um leigo no que diz respeito ao conhecimento no sentido lato da doença e das metodologias a aplicar em alunos com necessidades educativas especiais, o investigador sente necessidade em aprender, tanto sobre a doença, como metodologias de ensino, questionando-se constantemente, se com esta ou aquela atividade o aluno vai conseguir atingir os objetivos pretendidos.

Um primeiro objetivo deste trabalho será estudar o impacto do uso da calculadora gráfica na perceção que um aluno com estas características consegue adquirir, no estudo de fenómenos passíveis de modelação e de tradução através de funções e verificar se é possível transportar, mesmo que por breves momentos, esse conhecimento para uma área mais abrangente, tal como a resolução de problemas.

Um segundo objetivo corresponde à procura de metodologias possíveis de ensino/aprendizagem, lançando na comunidade científica o desafio de promover o seu uso, abrindo novos horizontes e ultrapassando barreiras, que se colocam para o comum dos professores, não preparado para enfrentar este tipo de desafios.

No caso de alunos com necessidades educativas especiais são várias as barreiras que os educadores e professores têm de transpor, para que estes alunos consigam adquirir novos conhecimentos. É necessário desenvolver, imaginar e criar novas metodologias, com o intuito de fomentar essa aprendizagem. Neste sentido, qualquer avanço que promova uma melhor inserção do aluno na sociedade é bem-vindo por parte dos encarregados de educação, os quais muitas das vezes revelam uma grande ansiedade para com a educação dos seus educandos.

Considerando este um terceiro objetivo do trabalho, pretende-se promover, da melhor maneira possível, um impacto social, procurando o debate de ideias sobre novas metodologias a implementar, desenvolvendo estudos mais elaborados, os quais poderão direcionar alunos com necessidades educativas especiais a integrarem-se na sociedade, fomentando o desenvolvimento da sua linguagem, a sua compreensão do próximo e motivando-os para uma linguagem universal à qual chamamos Matemática.

Tal como Bento de Jesus Caraça declarou na conferência "A Cultura Integral do Indivíduo" (1933), é necessário que todos os nossos jovens sejam integrados numa sociedade unida, que não faça distinções dentro das próprias diferenças já existentes e que promova um ensino personalizado mas para todos.
Associadas a estes objetivos, surgem questões muito específicas, direcionadas para a metodologia em estudo:

a) Qual o papel das tecnologias na compreensão e conexão de conhecimentos matemáticos?

b) Como é que as tecnologias influenciam a aprendizagem da matemática em alunos com síndrome de Asperger?

São estas as questões a que este trabalho tentará responder, fundamentando as conclusões na análise dos dados recolhidos durante a investigação.

1.3. Organização do trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em cinco partes fundamentais, designadas por capítulos. Após esta primeira etapa introdutória, o segundo momento corresponde à *Revisão de Literatura*, no terceiro momento apresenta-se a *Metodologia*, numa quarta parte apresenta-se a *Análise de Dado*s e, por fim, apresentam-se as conclusões alcançadas.
Relativamente à *Revisão de Literatura*, aborda-se inicialmente o conceito de autismo e espectro autista, explicando-se as principais características de alunos portadores de Síndrome de Asperger. De seguida, é explora-se o tema da motivação para a aprendizagem da Matemática, e, sendo este um trabalho direcionado para o nível do secundário e assente na aplicação da calculadora em sala de aula, é feita uma reflexão sobre a Matemática e as funções, e a implementação das calculadoras gráficas na modelação de situações traduzíveis por funções.
Na *Metodologia* desenvolve-se o tema das características da investigação qualitativa, direcionada para um estudo de caso, apresentando-se vantagens e desvantagens deste

tipo de investigação. De seguida, são explorados dois tópicos com o intuito de contextualizar o aluno: legislação europeia e portuguesa direcionada para o ensino de alunos portadores de deficiência e o contexto escolar do aluno, direcionado para o ensino profissional. Ainda neste capítulo é descrito o trabalho de investigação desenvolvido, e que será minuciosamente narrado no capítulo seguinte.

Na *Análise de Dado*s é relatado e analisado o trabalho desenvolvido e respetivas conclusões obtidas pelo aluno, aquando da implementação das atividades que se encontram na base desta investigação. Neste capítulo é possível identificar uma análise de dados qualitativa que fundamenta as conclusões do capítulo seguinte.

Por fim, far-se-á uma breve revisão sobre o trabalho de pesquisa realizado, respondendo às questões colocadas no início deste trabalho de investigação.

Capítulo 2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste segundo capítulo são trabalhados um conjunto de temas, importantes de abordar na elaboração desta investigação, nomeadamente, o conceito do autismo numa perspetiva histórica e, num segundo nível, é feita uma reflexão sobre o tema complexo das relações entre o autismo e a aprendizagem. Este capítulo completa-se com uma análise sobre a motivação para a aprendizagem da matemática, aplicando essa mesma motivação para o tema das funções, no que diz respeito ao uso da calculadora gráfica na modelação matemática.

2.1. Conceito de Autismo

A palavra "autismo" tem uma ascendência grega, originando das palavras "*autos*" e "*ismo*", as quais significam, respetivamente "em si" e "voltado para". Sem dúvida que o conceito "voltado para si mesmo" é, talvez, aquele que caracteriza melhor, nos nossos dias, uma pessoa portadora de autismo.

No entanto, a palavra "autismo" esteve ligada a conceitos diferentes ao longo dos tempos.

A primeira vez que o termo foi utilizado, aconteceu em 1904, pelo psiquiatra Plouller, o qual associou o conceito a pacientes com esquizofrenia (Gauderer, 1993).

Mais tarde, em 1911, o conceito evoluiu com o psiquiatra Beuller, conotando a palavra a pacientes que perdiam o contato com a realidade e isolamento exagerado (Lira, 2004).

O conceito atual só apareceu mais tarde, em 1943, com as publicações de Kanner.

Consultando o dicionário Lello Escolar (1980), verifica-se que o conceito associado à palavra "autismo" é:

> Um estado mental caracterizado pela tendência a alhear-se do mundo exterior e ensimesmar-se. (Lello, 1980)

No entanto, aprofundando a definição de "autismo" foi feita uma pesquisa utilizando outras fontes de informação.

Assim, na Moderna Enciclopédia Universal (Oliveira, 1984), ao procurar a palavra "autismo" no tomo II, pode ler-se:

> (psicologia) termo criado por Bleuler para designar o desapego da realidade, acompanhado de uma predominância da vida interior. Este caracteriza-se por voltar-se do sujeito sobre si mesmo aproxima-se da atitude de introversão descrita na psicologia analítica de Jung. O sujeito encontra-se como que encerrado num espaço interior, mostrando-se incapaz de se exteriorizar. (Oliveira, 1984)

Mas a melhor maneira de explicar o "autismo" surge da Associação dos Amigos do Autismo (AMA), que o define como:

> uma das mais graves perturbações de desenvolvimento da criança, que resulta numa incapacidade que se prolonga durante toda a vida. Manifesta-se através de dificuldades muito específicas ao nível da interação social, da aquisição e uso convencional da comunicação e da linguagem, pela restrita variedade de interesses e alterações do comportamento. Estas perturbações, estão geralmente associadas a dificuldades em utilizar a imaginação, em aceitar alterações de rotinas, a um défice de atenção e de concentração, à falta de motivação e à exibição de comportamentos estereotipados, implicam também um défice na flexibilidade de pensamento e um modo de aprender peculiar. Desta forma, as perturbações do espectro autista caracterizam-se por dificuldades em compreender e responder de forma adequada às diferentes situações do meio ambiente, selecionar e processar informação pertinente, bem como, responder a estímulos sensoriais Verifica-se que, embora o autismo resulte de uma disfunção no desenvolvimento do Sistema Nervoso Central e a investigação indique que os fatores hereditários e genéticos tenham um peso importante, também, a forma como o meio ambiente aceita e lida com estas crianças e jovens são determinantes no seu desenvolvimento e na sua inclusão social. (Reis, 2011)

Esta é uma definição extensa que necessita de uma análise cuidada e rigorosa, visto que o conceito evoluiu cronologicamente. Assim, o que devemos reter desta informação é que o autismo corresponde a uma deformação do Sistema Nervoso Central, o qual impede a criança de interagir de forma convencional com o meio e as pessoas que o rodeiam.

Quanto às características das pessoas com autismo podem ser, entre outras, isolamento, dificuldades de relacionamento, atraso na aquisição da fala, excelente memória, comportamento repetitivo, bizarro e obsessivo.

2.1.1. Síndrome de Asperger

São muitas as teorias sobre o surgimento desta doença. Mas de facto, não se sabe ao certo a razão do seu aparecimento, pois não foi detetada qualquer caraterística genética que indique a sua presença. Pesquisando no *site* da **Associação Portuguesa do Síndrome de Asperger**, encontra-se uma definição possível para esta doença*:*

> A Síndrome de Asperger é uma perturbação neuro comportamental de base genética, pode ser definida como uma perturbação do desenvolvimento que se manifesta por alterações sobretudo na interação social na comunicação e no comportamento. Embora seja uma disfunção com origem num funcionamento cerebral particular, não existe marcador biológico, pelo que o diagnóstico se baseia num conjunto de critérios comportamentais. (APSA, 2012)

Esta é uma doença que atinge cerca de 40000 pessoas em Portugal, na maioria dos casos do sexo masculino. Os jovens portadores desta perturbação tendem a limitar os seus interesses, tornando-os rotineiros. São muitos os casos em que estes jovens conseguem dominar o raciocínio lógico, sem que para isso consigam entender a profundidade das suas aplicações práticas.

Mas até que ponto as aprendizagens impostas numa sala de aula são compatíveis com estes alunos? Será que conseguem atingir os objetivos traçados? E se a resposta for afirmativa, como avaliar que o aluno conseguiu efetivamente adquirir novas competências?

2.1.2. Autismo e a aprendizagem

O conhecimento que a maioria dos professores revela sobre o autismo é um dos fatores limitadores no processo de aprendizagem nestes alunos.

Foram muitas as discussões que o investigador assistiu em conselho de turma, onde os docentes afirmavam que o aluno não desenvolvia as tarefas propostas e que não conseguiam promover a sua participação, justificando a existência de mais alunos na turma que necessitavam da sua atenção.

Não é fácil promover a integração de um aluno autista dentro da sala de aula, a partir do momento em que o próprio professor não consegue desenvolver metodologias de aprendizagem adaptadas ao aluno e às suas limitações sociais e de compreensão.

Martins (2007) identifica algumas das razões salientadas por professores que impedem o aluno autista de progredir academicamente de uma forma regular: o professor não tem o conhecimento necessário sobre a doença para conseguir acompanhar o aluno; há necessidade de um acompanhamento mais personalizado em sala de aula com a presença de um segundo professor; muitas das vezes a pouca participação da família no processo de aprendizagem do aluno e por último o alheamento do aluno ao mundo real, abstraindo-se e ausentando-se frequentemente da sala de aula.

De facto, estas são alguma das razões que limitam a aprendizagem destes alunos, mas se analisarmos convenientemente estes pontos, é possível identificar alguma responsabilidade do professor nestas limitações: o docente tem a obrigação de procurar informação adicional para promover as metodologias adequadas na sala de aula, permitindo a todos os seus alunos uma melhor aprendizagem possível dentro das limitações físicas e sociais existentes nas nossas escolas.

Compete assim, a todos os professores promoverem a motivação dos seus alunos para a aprendizagem, de forma diferenciada, acompanhando as suas dificuldades e limitações, implementado metodologias diversificadas. O investigador considera a profissão de professor um trabalho inacabado, onde o técnico nunca deverá considerar que o seu conhecimento é suficiente e deverá procurar novos processos, ferramentas e metodologias que promovam melhores aprendizagens aos seus alunos.

2.2. Motivação para a aprendizagem da Matemática

Já é uma história antiga, aquela que nos fala do insucesso escolar dos alunos na disciplina de matemática.

Serão eventualmente muitos os fatores que levam a tão grande e grave insucesso, mas, de facto, um deles ocupa um papel de destaque - a motivação para a aprendizagem.

Hannula (2011) afirma que a matemática é considerada a disciplina académica com o maior sentido lógico e grau de objetividade. No entanto, as emoções, atitudes e motivações dos que a estudam, desempenham um papel fundamental no que concerne à sua educação matemática. É, por isso, impossível separar o processo de aprendizagem, da motivação individual do aluno.

Os alunos deverão ser motivados a aprender e a gostar de aprender, refletindo sobre os seus insucessos e aprendendo com eles, criando caminhos alternativos ao seu pensamento e raciocínio lógico.

Quem nunca teve um aluno que questionasse a necessidade de aprender conceitos matemáticos que nunca irá usar no seu futuro? Como explicar aos alunos a necessidade de aprenderem matemática? Qual a sua finalidade? O que ganham com isso?

Para responder a algumas destas questões é necessário ter em conta que uma das principais razões para que a matemática seja considerada uma das disciplinas curriculares obrigatórias assenta na formalização de um raciocínio mais elaborado e complexo, contribuindo para uma melhoria significativa no desenvolvimento do indivíduo como um todo, equipando-o de ferramentas apropriadas à resolução de problemas, formando-o em modelos matemáticos pré concebidos, úteis nos dias de hoje em várias áreas desde as engenharias às ciências.

É portanto necessário motivar os alunos, não apenas para terem sucesso, mas acima de tudo, para saberem lidar com os muitos insucessos que irão vivenciar em sala de aula, durante a resolução dos desafios e atividades matemáticas propostas.

É por isso importante compreender como se encontram interligadas as emoções, a cognição e a motivação, fundamentalmente para desenvolver uma metodologia correta, no sentido de promover um melhor bem-estar do aluno quanto à disciplina de matemática.

Peter Op´t Eynde (2007) apresentou um esquema no quinto CERME[1]. É possível identificar no desenho três categorias principais: cognição, motivação e afeto.

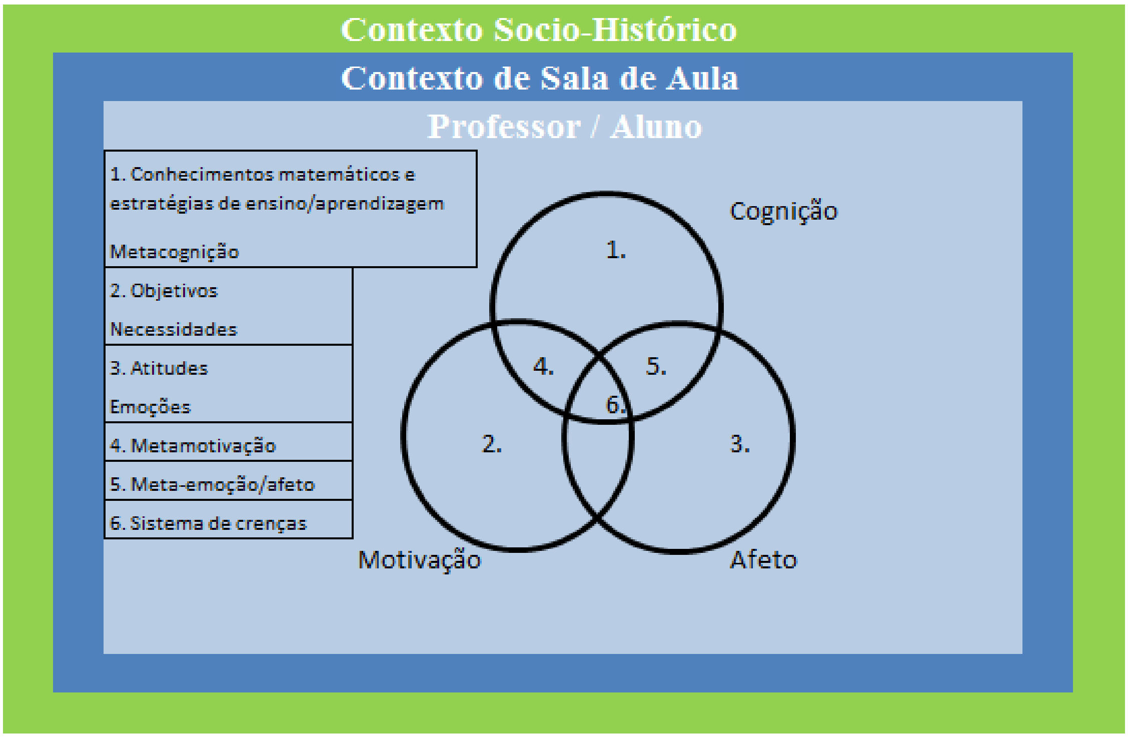


Ilustração 1 – Diferentes dimensões matemáticas, adaptado de (Hannula, M.S., Op ‘t Eynde, P., Schlöglmann, W & Wedege, T., 2007)

Como é possível visualizar no quadro anterior, as três áreas descritas encontram-se interligadas entre si, sendo de salientar o ponto 6, onde as três se encontram e se designa por “sistema de crenças”, o qual desempenha um papel fundamental no empenho e dedicação do aluno.

A maioria dos alunos considera a matemática como algo transcendente, que não serve para nada, pois não conseguem identificar a importância que desempenha na sua

[1] *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*

formação. Neste sentido são alvo de insucessos de aprendizagem, o que os leva a crer que não são capazes de ultrapassar os obstáculos e com isto sentem-se fracassados nesta área de desenvolvimento individual e intelectual. Por isso, não é fácil modificar o pensamento dos nossos alunos.

A nós, professores, cabe-nos o papel de explicar aos alunos, aprender com os seus fracassos, e fazê-los compreender que com essa aprendizagem será possível avançar no processo de aprendizagem da matemática. Lidar com esses momentos de uma forma positiva permite ao aluno procurar outros caminhos mais válidos para chegar ao resultado final.

Será então possível modificar os seus sentimentos para com a matemática?

No CERME 6 Hannula, Pantziara, Wage e Schoglmann (2009), identificam quatro razões principais para que a mudança seja considerada tão difícil:

a) Os aspetos do *estado* e do *traço* referente ao afeto.
b) Resistência à mudança. Como as crenças e atitudes individuais se encontram intimamente interligadas? Quais as que mudam naturalmente ao longo do tempo? Qual o grau de dificuldade para os influenciar?
c) Robustez das construções. As construções afetivas serão realizadas de forma semelhante em todos os níveis de idade?
d) Relativa estabilidade em relação à matemática, comparando com outras pessoas. Será que aqueles que apresentam uma relação com a matemática de forma positiva nos primeiros anos de aprendizagem, continuam a manter um melhor relacionamento, do que os seus pares, os quais tiveram um impacto mais negativo nos primeiros anos?

Mas o que devemos entender por “traço” e “estado”?

De facto, existe uma diferença entre estes dois conceitos, podendo distingui-los em patamares diferentes, tal como é possível visualizar na tabela seguinte:

	Conhecimento	Motivação	Emoções
Estado	Pensamentos na mente	Objetivos ativos	Estado emocional
Traço	Conceitos, fatos, etc.	Necessidades, valores, desejos, orientações motivacionais	Disposição emocional (atitude)

Tabela 1– Diferenças entre "traço" e "estado" adaptado de (Hannula, 2011)

No entanto, existem outras teorias que aumentam a complexidade, pois é tida em conta a interligação entre "traço" e "estado". Essa complexidade é possível de analisar na figura seguinte:

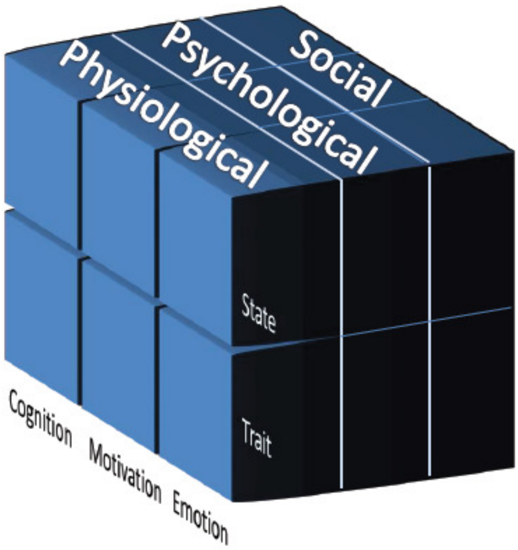


Ilustração 2 – Dimensões sociais e psicológicas do estado ao traço, (Hannula, 2011)

Hannula enuncia as seguintes conclusões:

> O que eu quero destacar aqui é a interação entre o individual e o social, e entre o traço e estado. Através do processo de comunicação o estado individual interage com o estado social. O individual está a se formar através da comunicação com o social e, através dessa mesma comunicação o social forma o individual. (Hannula, 2011)

Assim, é possível concluir que a motivação desempenha um papel fundamental no processo de aprendizagem, não só nas competências diretas que o aluno adquire na sala de aula, mas também as indiretas que irá aplicar ao nível social e individual.

2.3. Matemática e as Funções

Dentro deste ponto, encontra-se uma abordagem histórica da noção de função, uma explicação sobre a importância das funções, bem como uma referência aos processos de aprendizagem das funções

2.3.1. Importância das Funções

O conceito de função surgiu de forma primordial com Newton (1642 – 1727) com o nome de *"genita"*, (considerando o uso de uma das quatro operações aritméticas fundamentais para obter uma variável a partir de outra previamente conhecida) e, segundo Fernandes, Costa e Ferreira (2000) denominando a variável dependente como "*relatia quantias*".

O termo foi inicialmente utilizado em 1673 por Leibniz (1646 – 1716), no manuscrito *"Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus"*.

Com o passar do tempo, começaram a surgir expressões que relacionavam as variáveis independentes com as dependentes, e na correspondência trocada por Leibniz e Johann Bernoulli entre 1694 e 1698 surge finalmente uma associação de "função" ao conceito, não se sabendo ao certo qual dos dois utilizou primeiramente a palavra. Mais tarde, em 1748, Euler introduz a notação de "*f(x)*", para identificar uma certa função.

Considerando as funções como uma ferramenta matemática, a sua importância ganha relevo ao nível científico no manuseio de variáveis e na construção de fórmulas explicadoras de relações existentes na natureza. Partindo da mera observação, os cientistas procuram a construção de fórmulas (funções) que expliquem os resultados obtidos.

Assim, atualmente o conceito de função encontra-se associado à interação entre variáveis. Qualquer estudioso das ciências ou engenharias necessita de conhecer e relacionar variáveis, visto que as fórmulas científicas e físicas permitem generalizar e explicar o que nos rodeia, como leis da natureza.

Os alunos, ainda pouco diferenciados por áreas de aprendizagem, devem conhecer e manusear as funções mais importantes, como ferramentas matemáticas que permitem a relação entre variáveis científicas. Com este conhecimento, adquirem competências que lhes possibilitam aprofundar conhecimentos em diferentes campos do saber. Por outro lado, o estudo das funções permite um desenvolvimento do raciocínio lógico, importantíssimo como competência social. São estes alguns dos princípios básicos instituídos no programa da disciplina de matemática.

2.3.2. Processo de aprendizagem de Funções

Foram muitos os estudiosos que se debruçaram sobre este assunto, mas nas últimas décadas tem sido atribuída maior relevância às interações sociais dos alunos e às competências cognitivas. Vygotsky (1978) defende que a realidade social desempenha um papel fundamental na aprendizagem desenvolvida pelo aluno. Segundo este autor, os professores deverão desempenhar o papel de mediadores, como intermediários no processo de aprendizagem, para que o aluno consiga desenvolver competências através de tentativas sucessivas.

Johnson e Johnson (1990), consideram que o trabalho em grupo é uma metodologia que fomenta a confiança individual e permite aos alunos aprenderem melhor os conceitos matemáticos através de um trabalho interativo, levando a uma melhoria motivacional por parte dos jovens.

Nesta linha de raciocínio, Bishop e Goffree (1986) são da opinião que o trabalho de grupo permite aos participantes uma articulação de conhecimentos, fomentando a discussão de hipóteses de resolução, ultrapassando os erros de compreensão através do diálogo entre os alunos.

Estes autores salientam a importância que a confrontação de ideias desempenha no desenvolvimento intelectual, visto que um conceito matemático é adquirido quando se relacionam os conhecimentos pessoais e aqueles que se encontram em discussão durante o trabalho. A matemática é assim, uma rede de ideias, onde é possível interligar conhecimentos adquiridos e que, até então, não se reconhecia interação.

Por essa razão, qualquer atividade que permita ao aluno desenvolver as suas competências matemáticas através da partilha de experiências, clarificando conceitos e adquirindo novos conhecimentos matemáticos, deverá ser implementada em sala de aula. É necessário fomentar a partilha de exemplos, pois as palavras, por vezes, não são elucidativas sobre o melhor caminho a seguir. Todas as analogias e metáforas usadas durante um trabalho de grupo são enriquecedoras no processo de aprendizagem. Assim, segundo Bishop e Goffree (1986), o professor deve fomentar a partilha de ideias entre os seus alunos, permitindo a melhoria da linguagem e compreensão de conceitos matemáticos.

Ponte (2005) é também da opinião que os momentos de discussão, análise e reflexão constituem o pilar onde os alunos de uma turma conseguem formalizar e sistematizar um conceito matemático, permitindo-lhes estabelecer conexões matemáticas entre diferentes conceitos.

No entanto, o conceito de função não é fácil de adquirir. Segundo Sajka (2003) são vários os fatores que dificultam a aprendizagem do conceito de função para os alunos do secundário. Por um lado, a sua interligação com outros conceitos como o de número, variável, coordenadas e gráfico, desafiando os alunos a compreender as diferenças e as ligações estabelecidas entre si. Por outro lado, a natureza dual do conceito de função é também outro dos fatores dificultadores na sua aprendizagem.

A função pode ser entendida de forma estrutural, onde se subentende a existência de coordenadas e da existência de pares ordenados, ou como um processo operacional, onde se aplica uma variável conhecida num conjunto de operações computacionais de forma a encontrar o resultado de outra variável.

Mas qual deverá ser a metodologia de ensino a usar em sala de aula, para que um aluno consiga apreender o conceito de função?

Segundo Sfard (1991) o conceito matemático de função deverá ser primeiramente ensinado segundo uma abordagem operacional e progressivamente passar para a forma estrutural, seguindo três fases de aprendizagem: interiorização condensação e reificação. Conforme, durante a fase de interiorização os objetos matemáticos elementares vão sendo encarados de forma mais familiar pelo aluno, o processo passa a ser realizado mentalmente, sem ser necessária a sua esquematização momentânea para o identificar.

Na fase seguinte, os processos anteriores são comprimidos, originando entidades manipuláveis e autónomas. É durante esta fase que o aluno consegue ter a perspetiva de todo o processo, conseguindo inter-relacionar novos processos com outros previamente adquiridos, comparando e generalizando diferenças e semelhanças entre processos.

Por último, na fase da reificação o aluno já consegue identificar a entidade matemática e dá-se de forma instantânea. Será a partir desta fase que o aluno modifica a sua perspetiva sobre a função, usando-a com dinamismo e coerência, aplicando-a na resolução de problemas e situações do dia-a-dia, como uma ferramenta matemática, passando de uma forma de representação a outra, conforme o que lhe parece mais adequado.

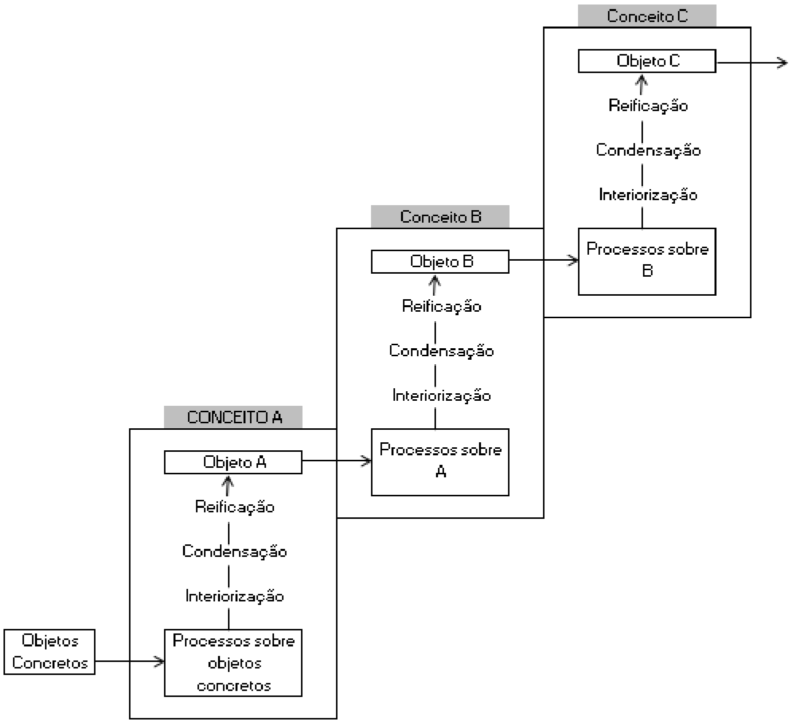


Ilustração 3 – Modelo geral de formação de conceitos, adaptado de Sfard, 1991

Como é explicado no esquema, só é possível compreender um novo conceito, quando o anterior se encontrar totalmente assimilado, o que justifica as dificuldades sentidas por alguns alunos na disciplina de matemática.

Gray e Tall (1994) apresentam uma teoria sobre a dualidade entre os processos e os conceitos, que Domingos (2003) traduz para *proceitos* (processos + conceitos). Segundo Gray e Tall (1994), cada proceito é desenvolvido a partir de um conjunto de proceitos básicos referentes a um objeto matemático, que por sua vez, está assente em três componentes: processo, objeto ou conceito e símbolo.

Estes autores indicam que a expressão de uma função (símbolo), fornece informação ao aluno a dois níveis: como encontrar o valor da função para valores específicos (processo) e, por outro lado, permite ter a perspetiva da função como um todo (objeto). Assim, consideram que o desempenho dos alunos na aquisição de novos conceitos matemáticos melhora consideravelmente quando o aluno compreende a relação entre um símbolo, o processo e o objeto matemático (Gray e Tall, 1994).

Sajka (2003) analisou as dificuldades que uma aluna revelou em resolver uma equação funcional, baseando-se na teoria do proceito. A aluna em questão frequentava o ensino secundário e reconhecia de formalmente o conceito de função, sendo-lhe familiar alguns exemplos de diferentes representações. A questão colocada à aluna foi: "Dá um exemplo de uma função f tal que para quaisquer números reais x e y do seu domínio se tenha a seguinte igualdade $f(x + y) = f(x) + f(y)$" (Sajka, 2003).

As dificuldades que a aluna revelou ao tentar resolver esta questão centram-se, segundo a autora, na existência de um *procept* muito limitado sobre a função e em interpretações erradas dos símbolos matemáticos. Sajka (2003) detetou três níveis de dificuldades: primeiro, as ambiguidades intrínsecas na notação científica, em segundo, o contexto restrito em que alguns símbolos aparecem no ensino, nomeadamente no que diz respeito à escolha das tarefas matemáticas e, por último, a interpretação idiossincrática da aluna de tarefas matemáticas. A autora afirma que:

> A natureza típica de tarefas escolares conduz a procedimentos standards. (Sajka, 2003)

Assim, os alunos nem sempre dominam corretamente ou na totalidade os conceitos matemáticos, revelando falhas na conceção ou dificuldades na resolução, ou mesmo abstração. Sem dúvida que a orientação de um certo conceito para um determinado tipo de tarefas matemáticas é limitadora, no que diz respeito à compreensão do próprio conceito. Dentro desta perspetiva, a modelação adquire um papel importante no reconhecimento das aplicações práticas de uma função.

2.4. Modelação Matemática

O conceito de modelo matemático surgiu durante o último século, conjuntamente com as geometrias não euclidianas de Riemann e Lobachewski (Leal, 1999), sendo que este conceito era amplamente utilizado no meio académico. Assim surgem algumas definições sobre o que é um modelo matemático.

Segundo Maki e Thompsom (1973)

> Modelo Matemático é um sistema axiomático consistindo de termos indefinidos que são obtidos pela abstração e qualificação de ideias essenciais do mundo real. (Maki, Thompsom, 1973)

Segundo Edwards e Hansom (1990),

> Um modelo matemático é o produto da transferência de um conjunto de elementos matemáticos (como sejam, funções ou equações), com vista à obtenção de uma representação matemática de uma parcela do mundo real. (1990)

No caso de Swetz e Hartzler (1991),

> Modelo matemático de um objeto ou de um fenómeno real é um conjunto de regras ou leis, de natureza matemática, que representam adequadamente o objeto ou o fenómeno na mente de um observador. (1991)

Biembengut (1997) é da opinião que o modelo matemático é

> Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de Modelo Matemático. (1997)

Mas efetivamente um modelo matemático pretende dar resposta a um conjunto de questões que surgem durante a resolução de um problema matemático. Assim, segundo Davis e Hersh (1985), a construção de um modelo matemático pretende:

> 1) Dar respostas sobre o que acontecerá no mundo físico;
>
> 2) Influenciar a experimentação ou as observações posteriores;
>
> 3) Promover o progresso e a compreensão conceituais;

4) Auxiliar a axiomatização da situação física;

5) Incentivar a Matemática e a arte de fazer modelos Matemáticos.

Contudo, não é fácil a criação do modelo matemático, pois pressupõe o domínio das características de funções previamente estudadas para conseguir escolher convenientemente a qual aplicar em cada uma das situações. Neste sentido, as ferramentas disponíveis desempenham um papel fundamental e facilitador no trabalho de criação do modelo matemático.

São muitos os autores que identificam a modelação matemática como um processo de tradução da linguagem do mundo real para linguagem matemática. No entanto, segundo Biembengut (1997), para que esta transição seja possível, é necessário seguir três etapas sequenciais e imprescindíveis no processo de modelação:

1) *Interação com o assunto*

   a) Reconhecimento da *situação problema*;

   b) Familiarização com o assunto a ser modelo - *pesquisa*

2) *Matematização*

   a) F*ormulação do problema* - hipótese

   b) Resolução do problema em termos do modelo

3) *Modelo Matemático*

   a) *Interpretação* da solução - validação.

Esta sequência de etapas encontra-se reconhecível no esquema abaixo, representativo do ciclo da modelação.

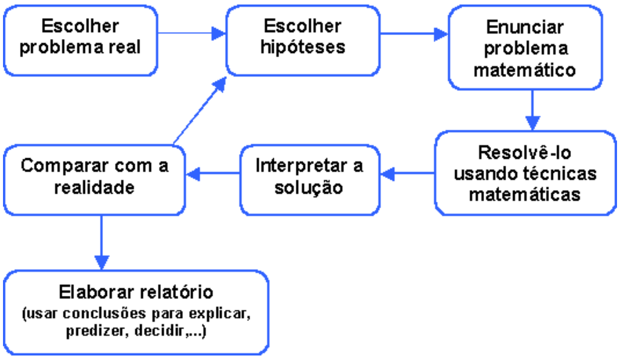


Ilustração 4 – Esquema explicativo do processo de modelação adaptado de Silva (2012)

Neste esquema é visível a existência de um ciclo, que permite que o processo se repita as vezes que forem necessárias, enquanto o modelo identificado não for o mais adequado para justificar as variáveis estudadas.

Ian Stewart afirma,

> Qualquer descrição matemática do mundo real é um modelo. Manipulando o modelo esperamos compreender algo da realidade. E já não perguntamos se o modelo é verdadeiro, perguntamos unicamente se as suas implicações podem ser verificadas experimentalmente. (Silva, 2012)

De facto, o modelo matemático tem a caraterística de se apresentar em diferentes formatos, desde uma simples equação literal até um modelo mais complexo de equações diferenciais.

São muitos os exemplos de aplicações de modelos matemáticos nas ciências: desde o estudo estatístico da evolução de uma espécie de mosca, até ao grau de desenvolvimento do feto humano ao longo do processo de gestão.

Contudo, a modelação não pode ser considerada como uma simples ferramenta matemática, pois nesta área tem a potencialidade de desempenhar um papel fundamental no raciocínio lógico dos alunos. No entanto, para modelar uma situação matemática, é necessário reconhecer a influência de parâmetros em modelos *standards*.

Nos nossos dias, essa dificuldade é ultrapassada, visto que o aluno tem acesso a um conjunto de ferramentas que lhe permitem simular o modelo matemático e identificar os parâmetros mencionados anteriormente, sendo a calculadora gráfica uma dessas ferramentas.

2.5. Génese Instrumental

Nem todos os professores são unânimes sobre a utilização da calculadora gráfica em sala de aula, as opiniões variam desde aqueles que consideram a sua utilização indispensável em todas as aulas, aos que pensam que nunca deveriam ter sido utilizadas na sala de aula.

E como será que os alunos encaram a calculadora: um objeto estranho, cheio de funcionalidades estranhas e complexas, ou uma ferramenta útil na aula de matemática?

Segundo Vygotsky (1978), um instrumento é um intermediário, estando situado entre o artefacto e as operações psíquicas. Segundo esta ideia, é necessário dominar a técnica para utilizar o artefacto na sua plenitude, para que este possa contribuir na resolução das tarefas.

Rabardel (1995), baseando-se na teoria vygotskiana, identifica as diferenças entre artefacto e instrumento. Embora o objeto material ou abstrato possa estar disponível para a realização de uma certa atividade só se torna útil quando o utilizador o conseguir utilizar e aplicar na resolução das tarefas.

Nesse momento, quando se toma consciência da como dominar e utilizar o artefacto na resolução de uma tarefa ou atividade passa a ser considerado como instrumento.

Rabardel (1995) identifica o instrumento como um conjunto de artefactos materiais ou simbólicos construídos pelo utilizador ou por outros associados a um esquema ou conjunto de esquemas de utilização pré-existentes socialmente ou construídos individualmente.

Este autor considera um esquema como um conjunto de procedimentos organizados com o intuito de resolver uma certa atividade, contemplando uma parte individual e outra social na sua génese.

No caso dos esquemas na atividade instrumental são de caráter social, pois, por um lado, as ferramentas apresentam características dos seus inventores, por outro encontram-se inseridas numa certa cultura, época em que foram criadas, e, por último, o trabalho desenvolvido por parte dos alunos é fechado à comunidade escolar onde se encontram inseridos.

Para Rabardel (1995), a passagem de um artefacto à categoria de instrumento não é um processo espontâneo, pelo contrário, implica a aprendizagem sobre as suas funcionalidades. Este autor denomina este processo de aquisição como *génese instrumental*.

Assim, este fenómeno acontece quando o utilizador domina e utiliza o artefacto desenvolvendo esquemas mentais que envolvam as suas potencialidades e que tornam o artefacto útil à resolução da atividade.

Segundo Rabardel (1995), a génese instrumental apresenta duplo sentido: por um lado o processo de instrumentalização, dirigida para o artefacto e onde o sujeito o utiliza, adaptando-o aos seus hábitos de trabalho; por outro lado a instrumentação, dirigida para o utilizador, onde os constrangimentos do artefacto contribuem para orientar o trabalho desenvolvido pelo utilizador.

Trouche (2004) apresenta um esquema descritivo da génese instrumental, diferenciando os dois sentidos que este apresenta segundo o conceito descrito por Rabardel.

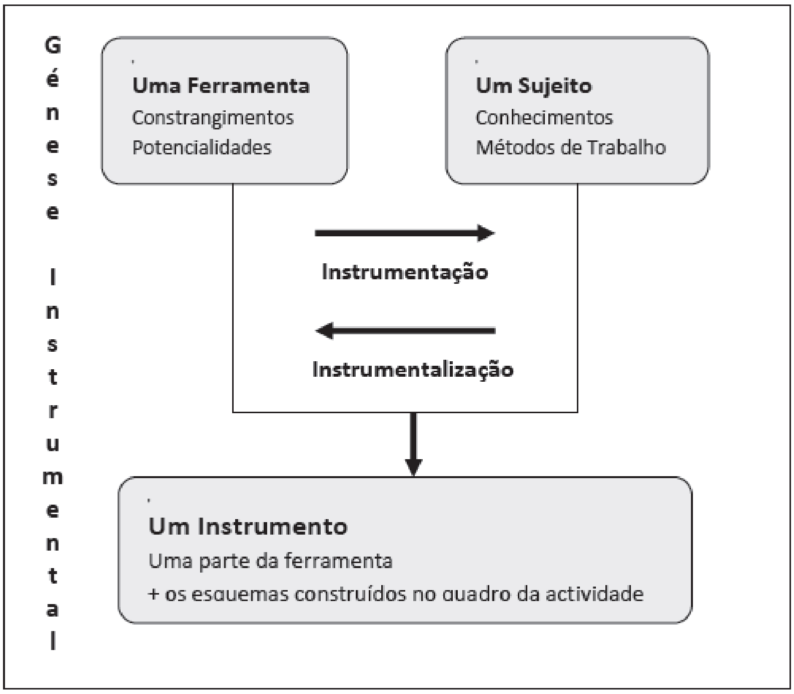


Ilustração 5 – Génese Instrumental – combinação de dois processos (Trouche, 2004)

Segundo Rabardel (1995), a instrumentalização corresponde ao processo de exploração das funcionalidades do artefacto, no qual o utilizador seleciona, agrupa, modifica e produz esquemas adequados à resolução das atividades, enquanto o processo de instrumentação está direcionado para o utilizador, ao longo do qual ele produz e reproduz esquemas de utilização, tendo em conta as limitações do artefacto.

Mais tarde, Guin e Trouche (1999) identificam na génese instrumental duas fases distintas, a primeira ligada ao reconhecimento das funcionalidades, comandos e organização, considerada como a fase da descoberta, e uma segunda, onde o utilizador começa a ter consciência das potencialidades e constrangimentos do instrumento, adaptando uma maior coordenação entre o uso do instrumento e de outras técnicas não instrumentais.

No entanto, o uso da calculadora gráfica pelo aluno não significa que se transforme numa ferramenta útil no estudo das funções. É necessário analisar a maneira como esta é explorada e como é transformada num instrumento eficaz no manuseamento das funções, procurando identificar a existência da *Génese Instrumental*.

Guin e Trouche (1999) afirmam que o uso de uma ferramenta pode levar a um enriquecimento ou empobrecimento do instrumento e da própria atividade. São unânimes em defender que é necessário ter em atenção a forma como são exploradas as funcionalidades da calculadora em sala de aula, para que os processos de instrumentalização sejam desenvolvidos pelo aluno, bem como a sequência das tarefas apresentadas para exploração, com o intuito de promover o desenvolvimento dos processos de instrumentação.

É, assim, fundamental escolher a melhor metodologia de ensino para que a calculadora gráfica contribua efetivamente na *Génese Instrumental*.

Capítulo 3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este capítulo apresenta uma abordagem à metodologia qualitativa apoiada na técnica do estudo de caso implementada durante o trabalho de investigação.
Ainda neste capítulo, apresenta-se um resumo relativo à legislação europeia e nacional associada ao ensino especial. De seguida, encontra-se descrita a contextualização escolar do aluno, assente no ensino profissional, abordando-se o contexto da escola, o tipo de formação e o programa de matemática implementado neste ensino.
Por último, é feito um resumo sobre as atividades aplicadas em sala de aula, explicando o seu encadeamento e a sua importância no estudo em causa.

3.1. Investigação Qualitativa

Segundo Bogdan e Biklen (1994), são vários os métodos utilizados pelos professores para recolher informação: desde o bloco de apontamento, passando por diagramas e esquemas até ao equipamento de vídeo, sem o qual não seriam capazes de investigar. Porém, ainda de acordo com os mesmos autores, independentemente do método, todos pretendem atingir o mesmo objetivo: realizar uma investigação qualitativa, que se baseia em aspetos da vida educativa. Estes autores consideram que a investigação qualitativa revela cinco características, as quais nem sempre se encontram presentes em todos os estudos deste tipo, diferenciando assim o grau da investigação realizada. Assim, as características identificadas por estes autores são:

1. na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. a investigação qualitativa é descritiva;
3. os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5. o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

De fato é notória a efetiva participação dos investigadores no meio propício da investigação, despendendo grandes quantidades de tempo no processo de investigação e análise de dados, recolhendo-os sem a ajuda de apoio numérico e baseando-se em palavras ou mesmo imagens. Segundo Bogdan e Biklen (1994), os investigadores procuram analisar os dados no seu todo, não deixando nada ao acaso, pois consideram que nada é trivial, transmitindo no seu trabalho todas as informações recolhidas de forma minuciosa. Assim, os investigadores que implementam uma investigação qualitativa preocupam-se muito mais com o processo que é utilizado do que propriamente com os resultados obtidos pelo investigado, interessando muito mais o caminho usado e menos o resultado atingido. Para isso, seguem um princípio básico e importante numa investigação: não se deixam seduzir por eventuais metas, não procuram comprovar teorias impostas, são honestos nas suas análises, descrevendo o que observaram de forma minuciosa e imparcial, na expetativa de que qualquer pormenor seja importante e fundamental durante a investigação. No entanto, é importante referir que este tipo de investigação leva constantemente os investigadores a questionarem-se sobre as diferentes formas como as pessoas podem dar sentido às suas vidas.

De forma resumida, é possível concluir que a investigação qualitativa se encontra-se mais direcionada para a compreensão do funcionamento do método ou processo, deixando em segundo lugar os resultados obtidos pelo(s) observado(s), procurando recolher, compreender e analisar todas as informações da experiência, promovendo a imparcialidade e a neutralidade quanto às conclusões do trabalho.

3.2. Estudo de Caso

Este trabalho irá basear-se num estudo de caso, devido ao universo limitado disponível para o investigador. Na realidade, este trabalho existe devido à necessidade sentida aquando das tentativas ensinar um aluno com Síndrome de Asperger. Importa pois esclarecer, o que é, afinal, um estudo de caso. Segundo Nisbet e Watt (1984):

> É um instante específico que frequentemente é designado para ilustrar um princípio mais geral. (1984)

Quanto ao tipo de estudos de caso, Yin (1984) apresenta uma tripla classificação:

- Exploratório – aquele que permite a outros estudos aprofundar as suas perguntas;
- Descritivo – aquele que fornece ao leitor descrições aprofundadas do tema estudado;
- Explanatório – aquele que permite a realização de testes a teorias já existentes.

Relativamente à tipologia do estudo de caso, esta pode ser analisada a dois níveis distintos, que se encontram exemplificadas no diagrama seguinte:

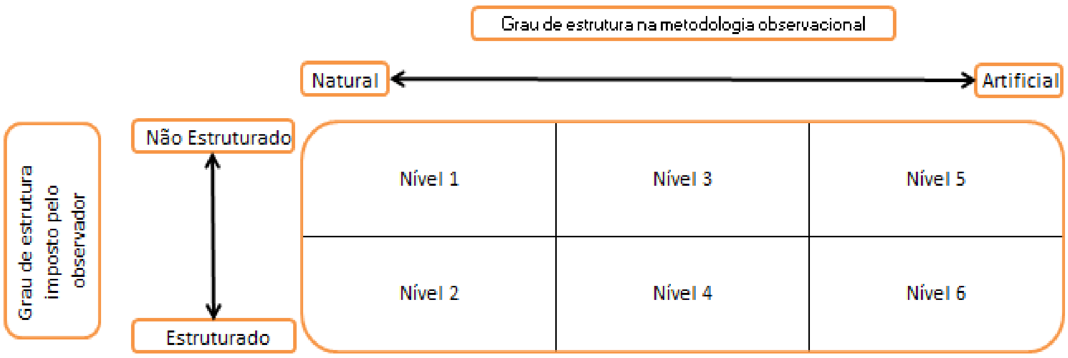


Ilustração 6 – Metodologia observacional e imposta pelo observador em estudos de caso Cohen, Manion & Morrison (2001)

Como é possível observar no esquema anterior, a metodologia de investigação pode variar em duas áreas: por um lado no grau de estrutura imposta pelo observador e, por outro lado, no grau da metodologia observada. Neste sentido a interferência do observador modifica a tipologia do estudo de caso, sendo que no primeiro nível se encontra a menor das interferências e no sexto uma intervenção estrutura e artificial.

Mas, para além da metodologia a usar no estudo de caso, é de extrema importância a análise dos dados observados durante o estudo.

Sturman (1997) propõe como resposta a este problema o seguinte esquema de análise:

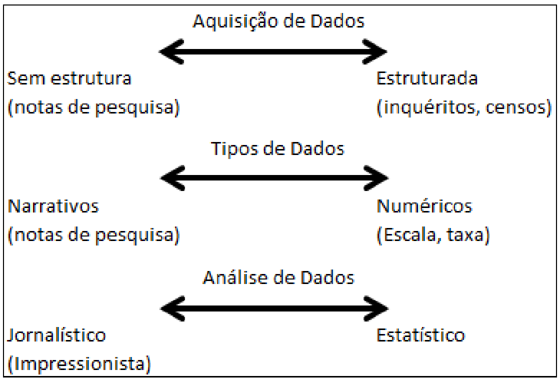


Ilustração 7 – Aquisição, tipos e análise de dados em estudos de caso adaptado de Sturman, (1997)

São muitos os estudos feitos baseados no caso particular. De facto, esta é uma metodologia que permite ao leitor criar empatia com o caso particular, levando a sua consciência à generalização dos factos estudados.

Acima de tudo, este tipo de estudo possibilita fundamentar ideias de forma mais clara, permitindo uma melhor compreensão das teorias abstratas, sendo esta uma das razões principais pelas quais tantos estudiosos optam por esta metodologia de investigação.

No entanto, é muito vago o conceito de caso, visto que pode ser tido em conta como um aluno, uma turma, uma escola ou mesmo uma comunidade (Cohen, 2005).

Esta metodologia permite ao investigador identificar a relação causa efeito, baseando-se numa observação em contexto real, nunca esquecendo do impacto do contexto em que se encontra inserido.

Sturman (1999) é da opinião que o estudo de caso permite conhecer a complexidade das relações dinâmicas de um certo sistema. Hitchcook e Hughes (1995), afirmam que o estudo de caso é bastante importante, fornecendo informação valiosa, quando o investigador não controla os seus eventos. Estes autores consideram, ainda que o estudo de caso apresenta um vasto conjunto de características:

> preocupa-se com uma descrição rica e viva de eventos relevantes para o caso;
>
> fornece uma narrativa cronológica de eventos relevantes para o caso;
>
> mistura-se uma descrição de eventos com a análise dos mesmos;

centra-se em atores individuais ou grupos de atores, e procura-se compreender as suas perceções dos eventos;
destaca-se eventos específicos que são relevantes para o caso;
o pesquisador está integralmente envolvido no caso;
é feita uma tentativa de retratar a riqueza do caso através de um relatório escrito. Hitchcook e Hughes (1995)

Devemos, todavia, ter em conta as limitações que o estudo de caso apresenta numa certa teoria explorada, visto que, dentro das mesmas condições, é possível observar resultados divergentes. Os estudos de caso estão limitados às suas características temporais, geográficas, organizacionais e institucionais, impossibilitando a generalização das conclusões daí conseguidas (Cohen, 2005).

É necessário, assim, encarar as limitações a que o estudo de caso está associado. Deverá ser encarado com a maior das honestidades, sendo que observador/investigador terá como missão relatar todos os acontecimentos observados, não selecionando aqueles que lhe parecem mais importantes ou mais direcionados para as respostas que procura.

Deveremos ter em conta que, no estudo de caso, é possível a formulação de teorias científicas, as quais terão de ser suportadas pelo estudo, não esquecendo, porém, que estas teorias podem ser colocadas em causa em outro estudo de caso, dentro do mesmo prisma de estudo.

Simons (1996) afirmou que o estudo de caso teria de respeitar a existência de seis paradoxos:

- Rejeitar a dicotomia sujeito-objeto, tomando em conta todos os participantes de forma semelhante;
- Reconhecer a contribuição que um encontro genuíno pode fornecer um melhor conhecimento para o processo educacional;
- Ter em conta diferentes perspetivas como metodologias de conhecimento;
- Aproximar os métodos dos artistas;
- Procurar a abstração dos processos tradicionais de análise;
- Ter em conta estes paradoxos, nunca esquecendo o interesse das pessoas.

É possível concluir que, o estudo de caso é um processo de investigação viável e que pode servir de base para um estudo mais alargado a aprofundado.

3.3. Legislação

Ao longo deste subponto, é desenvolvido o tema da legislação, abordando-se de forma histórica e explicativa a evolução do conceito de deficiência e os processos de abordagem para a sua integração na sociedade, nomeadamente, no que diz respeito a medidas políticas e educativas previstas em *Diário da República* para implementação nas escolas portuguesas.

3.3.1. Cidadãos Portadores de Deficiência na Comunidade Europeia

No ano de 1996, a União Europeia incentivou uma nova estratégia voltada para os cidadãos portadores de deficiências, ao publicar uma comunicação intitulada "Igualdade de oportunidades para as pessoas com deficiência". Não se limitando a essa medida, foi criado um grupo representativo das pessoas com deficiência, intitulado Fórum Europeu das Pessoas com Deficiência.

Foram muitas as iniciativas avançadas pela Comunidade Europeia, com o intuito de integrar socialmente os cidadãos com deficiência.

Algumas dessas iniciativas foram a e-Europa 2002, e-Accessibility e a diretiva número 2000/78/CE, que implementa um quadro geral de igualdade de tratamento no emprego e na atividade profissional e prevê um programa de ação comunitário de combate à descriminação das pessoas com deficiência.

2003 foi proclamado como o Ano Europeu das Pessoas com Deficiência e implementada a necessidade de um Plano de Ação Europeu para a deficiência, no qual todos os países do quadro comunitário teriam de participar ativamente, adotando medidas concretas, durante o período compreendido entre 2004 e 2010.

A nível nacional, surgiu então, a necessidade de implementar e reestruturar medidas que visassem uma melhoria significativa da integração das pessoas com deficiência.

3.3.2. Cidadãos portadores de Deficiência e a Legislação Portuguesa.

A Constituição da República Portuguesa, regulamenta o princípio da igualdade e segundo o nº 1 do 71º artigo:

> Os cidadãos portadores de deficiência física ou mental gozam plenamente dos direitos e estão sujeitos aos deveres consignados na constituição, com ressalva do exercício ou do cumprimento daqueles para os quais se encontram incapacitados" (Diário da República 183/21 janeiro, 2006)

Com base neste princípio, a lei nº 38/2004 de 18 de agosto aprova um conjunto de medidas ao nível da prevenção, habilitação e reabilitação de pessoas com deficiências, a serem implementadas pelo estado português.

Com o intuito de renovar as medidas políticas e adaptá-las à realidade, decorreu uma consulta nacional a associações e organizações defensoras dos direitos das pessoas portadoras de deficiência, procurando reconhecer as dificuldades associadas à integração das pessoas portadoras de deficiências, associadas à sua estigmatização por parte da sociedade.

3.3.3. Resolução de Conselho de Ministros 120/2006

No ano de 2006, o 14º Governo Constitucional aprovou uma resolução, com o intuito de promover a prática de novas políticas de inclusão social, de pessoas com deficiências ou incapacidades.

Fazendo uma análise aprofundada da resolução de conselho de ministros 120/2006, damos conta que, segundo o indicado, existem dois modelos explicativos e antagónicos da deficiência, habitualmente designados por modelo médico e modelo social.

O modelo médico baseia-se numa avaliação estritamente individual, salientando que o único tratamento possível passaria pela medicina, desvalorizando a pessoa com deficiência, como um indivíduo com necessidades especiais.

Por outro lado, no modelo social, a perspetiva da deficiência assenta num princípio de inclusão, onde a responsabilidade coletiva desempenha um papel importante, no que diz respeito aos direitos e diferenças humanas, responsabilizando-nos a todos como elementos importantes na integração e valorização do indivíduo portador de deficiência.
No entanto, a resolução de conselho de ministros 120/2006 promove o modelo social, como exemplo a seguir, responsabilizando os seus pares sociais pela implementação das decisões políticas inerentes a este documento.
Segundo a Classificação Internacional da Funcionalidade e Incapacidade (CIF), o conceito de deficiência encontrava-se inadequado, pelo que foi proposto um novo sistema de classificação multidimensional e interativo, passando-se a usar a palavra incapacidade

> como termo genérico que engloba os diferentes níveis de limitações funcionais relacionadas com as pessoas e com o meio ambiente (*Diário da Repúblic*a 183/21 janeiro, 2006)

A Resolução de Conselho de Ministros número 120/2006 salienta ainda a necessidade de implementar uma intervenção em três frentes, de forma a melhorar as condições sociais e humanas de pessoas com deficiência, os quais são:

- reabilitar as pessoas com deficiência;
- criar o primeiro plano de ação para a integração de pessoas deficientes;
- criar um grupo de trabalho interdepartamental.

Em Portugal, e segundo os censos de 2001, existiam 634408 pessoas portadoras de deficiência, o que corresponde a 6,13% da população portuguesa. Dentro do universo dos cidadãos portadores de deficiência, 53,63% são do sexo masculino.
No entanto, no ano de 2004, realizou-se um inquérito a nível nacional, através de amostragem, com o intuito de estudar o índice de deficiência da população, constatando-se que a taxa de pessoas com deficiência era substancialmente superior, atingindo os 9,16%.

Esta é uma percentagem mais próxima da realidade em termos internacionais, pelo que mais representativa da verdade.
Para que os cidadãos portadores de deficiência se fizessem representar social e politicamente, foram criadas associações e organizações com a finalidade de dar voz às suas necessidades, defendendo os seus direitos como cidadãos ativos da sociedade.
O apoio que o estado português deve atribuir a estas organizações, encontra-se consignado na Constituição da República e reforçado na Lei de Bases da Prevenção, Habilitação, Reabilitação e Participação das Pessoas com Deficiência.
Seria, no entanto, importante consolidar esforços para que a conjugação entre os vários parceiros sociais ocorresse de forma a otimizar as suas ações.
Assim, a criação do primeiro Plano de Ação para a Integração das Pessoas com Deficiências ou Incapacidade, pretendia atuar na comunidade europeia, apoiando no seguinte conjunto de estratégias:

1 – Promoção dos direitos humanos e do exercício da cidadania;

2 – Integração das questões da deficiência e da incapacidade nas políticas sectoriais;

3 – Acessibilidade a serviços, equipamentos e produtos;

4 – Qualificação, formação e emprego das pessoas com deficiências ou incapacidade;

5 – Qualificação dos recursos humanos/formação dos profissionais e conhecimento estratégico.

Para implementar o plano de ação, o Governo pretendia intervir a três níveis distintos:

a) Acessibilidade e informação;
b) Educação, qualificação e promoção da inclusão social;
c) Habilitação e certificação de condições de vida dignas.

Ao longo da resolução de Conselho de Ministros é possível identificar todas as recomendações efetuadas e respetivas datas a serem implementadas nos diferentes níveis de ação.

3.3.4. Decreto-lei número 3 de janeiro de 2008

Com o 17º Governo Constitucional Português, é criado o Decreto-lei 3/2008, o qual regulamenta e promove a igualdade de oportunidades, valorizando a educação e a melhoria da qualidade do ensino, nomeadamente, a dos alunos com necessidades educativas especiais.

Seguindo as propostas da Declaração de Salamanca (1994), pretendia-se implementar políticas de promoção da escola inclusiva, a qual teria como objetivo prioritário a inclusão dos alunos tradicionalmente excluídos.

De forma a garantir uma equidade educativa, os atores educativos e as suas práticas deveriam assegurar a gestão da diversidade de estratégias que permitissem dar resposta às necessidades educativas dos alunos.

Pressupôs-se, com o Decreto-lei 3/2008, que o sistema de ensino seria individualizado e personalizado, centrado no aluno e nas suas necessidades, promovendo competências universais que permitissem a sua autonomia e integração na sociedade como membro ativo.

Dentro desta perspetiva, o Decreto-lei assegurava que todos os alunos tinham necessidades educativas, no entanto, existiam casos que exigiam a ativação de apoios especializados.

Esses apoios especializados serviam de resposta às necessidades educativas especiais de alunos com limitações,

> significativas ao nível da atividade e da participação, num ou vários domínios de vida, decorrentes de alterações funcionais e estruturais, de carácter permanente, resultando em dificuldades continuadas ao nível da comunicação, da aprendizagem, da mobilidade, da autonomia, do relacionamento interpessoal e da participação social e dando lugar à mobilização de serviços especializados para promover o potencial de funcionamento biopsicossocial. (Diário da República 3 janeiro, 2008)

Assim, o Decreto-lei 3/2008,

> define os apoios especializados a prestar na educação pré -escolar e nos ensinos básico e secundário dos sectores público, particular e cooperativo, visando a criação de condições para a adequação do processo educativo às necessidades educativas especiais dos alunos com limitações significativas ao nível da atividade e da participação num ou vários domínios de vida, decorrentes de alterações funcionais e estruturais, de carácter permanente, resultando em dificuldades continuadas ao nível da comunicação, da aprendizagem, da mobilidade, da autonomia, do relacionamento interpessoal e da participação social.
> (Diário da República 3 janeiro, 2008)

Ainda no número dois do 1º artigo do Iº capítulo, encontra-se o princípio que indica que:

> as escolas ou os agrupamentos de escolas, os estabelecimentos de ensino particular com paralelismo pedagógico, as escolas profissionais, direta ou indiretamente financiados pelo Ministério da Educação (ME), não podem rejeitar a matrícula ou a inscrição de qualquer criança ou jovem com base na incapacidade ou nas necessidades educativas especiais que manifestem, (Diário da República 3 janeiro, 2008).

As escolas ficariam assim impossibilitadas de fazer uma seleção dos alunos pelas necessidades que estes revelam.

No entanto, para que o processo de apoio individualizado fosse ativado, como se encontrava previsto, seria necessária a referenciação da criança/jovem, o mais precocemente possível, através dos órgãos de administração e gestão escolar.

O 16º artigo capítulo IV do Decreto-lei 3/2008, informava sobre as medidas a implementar, designadas por medidas educativas. Assim, as medidas propostas por este Decreto-lei foram:

a) Apoio pedagógico personalizado;

b) Adequações curriculares individuais;

c) Adequações no processo de matrícula;

d) Adequações no processo de avaliação;

e) Currículo específico individual;

f) Tecnologias de apoio.

As medidas referidas anteriormente podiam ser aplicadas em simultâneo, exceto as das alíneas b) e g), as quais apresentam uma implementação não cumulativas.

Saliento, no entanto, a alínea f) das medidas educativas, que, segundo o 22º artigo do Decreto-lei 3/2008,

> entende-se por tecnologias de apoio os dispositivos facilitadores que se destinam a melhorar a funcionalidade e a reduzir a incapacidade do aluno, tendo como impacte permitir o desempenho de atividades e a participação nos domínios da aprendizagem e da vida profissional e social. (Diário da República 3 Janeiro, 2008)

Ainda neste Decreto-lei, no 25º artigo identificavam as medidas educativas especificas para os alunos com perturbações do espectro do autismo.

Neste artigo é possível compreender que as unidades de ensino estruturado deveriam ser aplicadas em escolas que apresentassem um grupo de alunos enquadrados no espectro do autismo, sendo que o nível de resposta a atribuir dependia:

> do grau de severidade, nível de desenvolvimento cognitivo, linguístico e social, nível de ensino e pela idade dos alunos.” (Diário da República 3 janeiro, 2008)

Os objetivos das unidades de ensino estruturado para alunos com perturbações do espectro do autismo, foram ainda identificados neste documento:

a) Promover a participação dos alunos com perturbações do espectro do autismo nas atividades curriculares e de enriquecimento curricular junto dos pares da turma a que pertencem;
b) Implementar e desenvolver um modelo de ensino estruturado o qual consiste na aplicação de um conjunto de princípios e estratégias que, com base em informação visual, promovam a organização do espaço, do tempo, dos materiais e das atividades;
c) Aplicar e desenvolver metodologias de intervenção interdisciplinares que, com base no modelo de ensino estruturado, facilitem os processos de aprendizagem, de autonomia e de adaptação ao contexto escolar;
d) Proceder às adequações curriculares necessárias;
e) Organizar o processo de transição para a vida pós-escolar;
f) Adotar opções educativas flexíveis, de carácter individual e dinâmico, pressupondo uma avaliação constante do processo de ensino e de aprendizagem do aluno e o regular envolvimento e participação da família." (*Diário da República* 3 janeiro, 2008)

3.4. Contexto Escolar

Ao longo deste ponto, descreve-se a situação escolar do aluno e informa-se sobre o funcionamento dos cursos profissionais, nomeadamente no que diz respeito à disciplina de matemática. É ainda feita a caracterização do programa e a identificação dos objetivos específicos da disciplina que irá fazer parte da investigação.

3.4.1. Situação Escolar do Aluno

O aluno sobre o qual incide este estudo de caso frequenta atualmente o segundo ano do Curso Profissional Técnico de Informática de Gestão, lecionado na Escola Profissional Bento de Jesus Caraça, sendo aluno do investigador.
Devido às dificuldades que o aluno sente ao nível da leitura e interpretação de textos, a escola contratou uma professora do ensino especial que o acompanha uma vez por semana, durante um período de três horas. Para além disso, em conselho de turma

deliberou-se a implementação de um Plano Educativo Individual, como previsto no Decreto-lei 3 de 2008, já mencionado no subcapítulo anterior. No entanto, é necessário entender um pouco sobre os cursos profissionais, para melhor contextualizar o aluno.

3.4.2. Escola Profissional

As escolas profissionais surgem através do Decreto-lei 26/89, que regulamenta o seu aparecimento e fundamenta a necessidade de dar resposta a necessidades educativas mais especializadas do ensino não superior.
Os objetivos educativos atribuídos às escolas profissionais encontram-se definidos neste Decreto-lei e são seguidamente apresentados.

a) Contribuir para a realização pessoal dos jovens, proporcionando, designadamente a preparação adequada para a vida ativa;
b) Fortalecer, em modalidades alternativas às do sistema formal de ensino, os mecanismos de aproximação entre a escola e o mundo do trabalho;
c) Facultar aos jovens contato com o mundo do trabalho e experiência profissional;
d) Prestar serviços diretos à comunidade, numa base de valorização recíproca;
e) Dotar o País dos recursos humanos de que necessita, numa perspetiva de desenvolvimento nacional, regional e local;
f) Preparar o jovem com vista à sua integração na vida ativa ou ao prosseguimento de estudos numa modalidade de qualificação profissional;
g) Proporcionar o desenvolvimento integral do jovem, favorecendo a informação e orientação ativa, numa modalidade de iniciação profissional, a nível do 3º ciclo do ensino a até à efetivação da escolaridade obrigatória de nove anos. (Diário da República 26/1989)

Surge assim um novo modelo de formação mais direcionada às necessidades do aluno, numa metodologia mais prática e mais ligada à integração do jovem na vida ativa. No entanto, cada escola profissional apresenta metodologias e políticas educacionais próprias. Assim, é importante entender o funcionamento da escola em que o aluno se encontra inserido.

3.4.3. Escola Profissional Bento de Jesus Caraça

A Escola Profissional Bento de Jesus Caraça surge a 20 de agosto de 1990, quando a CGTP-IN (Confederação Geral dos Trabalhadores Portugueses – Intersindical Nacional) celebra um contrato-programa com o Ministério da Educação, no seguimento do que se encontra disposto no Decreto-lei 26/89.

Seguindo as palavras de António Leite, antigo professor da escola e hoje, diretor da Direção Regional de Educação do Norte:

> a EPBJC em concreto, como outras escolas de ensino profissional de uma forma genérica, estiveram na frente, durante mais de uma década, numa resposta que o Estado só reconheceu como necessária muito depois, já nos anos 2000. (EPBJC, 2010)

A escola Profissional Bento de Jesus Caraça, encontra-se em funcionamento há mais de 20 anos, com seis delegações, situadas de norte a sul do país (Barreiro, Beja, Lisboa, Pedome, Porto e Seixal).

É na delegação do Seixal que o investigador celebra o seu primeiro contrato como professor da disciplina de matemática, no ano de 1995, logo a seguir ao estágio inserido na licenciatura em Matemática, via educacional.

E desde então, é nessa delegação que se tem vindo a desenvolver maioritariamente o seu trabalho, seguindo os princípios de igualdade de oportunidades propostos por Bento de Jesus Caraça, patrono da escola. Mas efetivamente, como funciona um curso profissional? Quais as vantagens deste caminho de formação?

3.4.4. Cursos Profissionais (uma alternativa ao ensino regular)

De facto, os cursos profissionais surgem na época dos anos 80, como uma alternativa ao ensino, dito, regular.

As necessidades das empresas fazem-se sentir, quando os jovens saem da escola regular, sem qualquer preparação prática para a vida ativa e formação especializada.

O ensino regular é, nesta altura, uma ferramenta de preparação para o seguimento de estudos, seguindo um programa demasiado teórico e sem preocupação com a preparação do aluno para a vida ativa, não tendo como objetivos uma série de competências transversais imprescindíveis para o mundo do trabalho.

Com o aparecimento dos cursos profissionais, pretende-se alterar tudo isto, focando o ensino numa vertente mais prática e direcionada à formação e integração do indivíduo na vida ativa. Neste sentido, a matemática desempenha um papel fundamental, como disciplina estruturante e de conhecimento científico.

3.4.5. Matemática nos Cursos Profissionais

A matemática nos cursos profissionais não é apenas uma disciplina de cálculo, mas antes uma ferramenta útil para os jovens alunos, promovendo a sua autonomia, solidariedade e empreendedorismo. Esta é a disciplina que equipa o aluno de competências, tanto físicas como intelectuais, para que possa resolver problemas e situações do dia-a-dia, garantindo-lhe uma maior autonomia social.

No programa da disciplina de matemática, da ANQ (Agência Nacional para a Qualificação), responsável pela formação dos cursos profissionais, encontram-se descritas as principais finalidades da disciplina, que são:

a) Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
b) Desenvolver a capacidade de selecionar a Matemática relevante para cada problema da realidade;

c) Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
d) Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos;
e) Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
f) Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
g) Criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade atual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania ativa e participativa. (Qualificação, 2012)

Nos cursos profissionais, o programa da disciplina de matemática encontra-se dividido em pequenos capítulos, denominados de módulos.

Cada módulo é específico de um tema da área da matemática, sendo que existem dois grupos de módulos – a sequência A e a sequência B.

Esta situação decorre do facto de nem todos os cursos profissionais apresentarem a mesma carga horária da disciplina de matemática.

Pode-se dar conta dos temas e horas que cada módulo apresenta nas tabelas seguintes:

Número	Módulo	Horas
A1	Geometria	36
A2	Funções Polinomiais	36
A3	Estatística	27
A4	Funções Periódicas	36
A5	Funções Racionais	36
A6	Taxa de Variação	27
A7	Probabilidade	21
A8	Modelos Discretos	27
A9	Funções de Crescimento	27
A10	Otimização	27

Tabela 2 – Módulos de Matemática (categoria A)

Número	Módulo	Horas
B1	Funções Periódicas e Não Periódicas	36
B2	Estatística Computacional	36
B3	Modelos de Funções	36
B4	Programação Linear	30
B5	Jogos e Matemática	36
B6	Padrões Geométricos	36

Tabela 3 – Módulos de Matemática (categoria B)

Os cursos que tenham 300 horas programadas para a disciplina de matemática, deverão seguir a sequência A, enquanto nos restantes cursos, será necessário combinar módulos do grupo B com módulos do grupo A, de forma a dar resposta às exigências da formação específica desses cursos.

Os cursos lecionados na EPBJC (Escola Profissional Bento de Jesus Caraça) Delegação do Seixal têm programada para a disciplina de matemática, uma carga horária de 300 horas distribuídas pelos três anos de formação, pelo que é seguido o grupo A de módulos. Assim, os primeiros três módulos são programados para o primeiro ano de formação (10º ano de ensino), do quarto ao sexto módulo no segundo ano (11º ano de ensino) e do sétimo ao décimo módulo, no terceiro ano (12º ano de ensino).

O aluno sobre o qual incidirá a investigação do estudo de caso, encontra-se no segundo ano de formação, (11º ano). Por essa razão, o investigador optou por aplicar a investigação no programa do módulo cinco (funções Racionais), não obstante de poder englobar módulos já lecionados anteriormente, nomeadamente aqueles relacionados com funções.

3.4.6. Módulo A5 – Funções Racionais

Sendo este um módulo lecionado no segundo ano de formação, subentende-se que os alunos já dominem alguns conhecimentos sobre características gerais das funções.
No entanto, com este módulo é dado a conhecer ao aluno o conceito de assimptota, o qual é explorado através da resolução de problemas.
Neste sentido, o uso da calculadora gráfica, permite ao aluno outra abordagem na resolução de problemas, proporcionando uma investigação através de modelação, usando folhas de cálculo.
No programa previsto para este módulo, fundamenta-se o privilégio da utilização das tecnologias e da modelação matemática como foco de interesse e motivação para que os alunos desenvolvam raciocínios matemáticos.
Segundo o programa da disciplina de matemática, definido pela Agência Nacional para a Qualificação, as competências visadas no módulo das funções racionais são:

a) A aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
b) A aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções racionais;
c) A capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
d) A capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspeto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias ou outros;
e) A capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas. (Qualificação, 2012)

O ensino da matemática não se baseia apenas na aquisição de conhecimentos básicos e repetitivos, mas antes numa busca incessante de melhorar o processo de raciocínio lógico, fomentando e desenvolvendo nos nossos alunos, competências transversais, úteis para a sua vida futura, como cidadãos ativos e participativos na sociedade.

Relativamente aos objetivos de aprendizagem identificados no módulo A5, como fundamentais no processo de aprendizagem e que devem ser adquiridos pelos alunos, são:

> a) Elaborar modelos para situações da realidade do mundo do trabalho, da indústria, do comércio ou do mundo empresarial utilizando diversos tipos de funções;
> b) Apropriar alguns conceitos e técnicas associadas e os utilize como ”ferramentas” na resolução de problemas que envolvam compreensão de proporcionalidade inversa, frações, etc.;
> c) Estabelecer relações utilizando simultaneamente o estudo gráfico, numérico e analítico integrando operações com polinómios;
> d) Analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
> e) Estudar o comportamento das funções racionais para valores ”muito grandes” da variável e para valores ”muito próximos” dos zeros dos denominadores das frações que as definem;
> f) Construir e interprete modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre as funções polinomiais e as funções racionais;
> g) Usar métodos gráficos para resolver condições, melhorando a compreensão de eventuais métodos algébricos utilizados ou quando não os puder utilizar;
> h) Utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjeturas ou na comunicação de conclusões. (Qualificação, 2012)

Neste caso, será possível distinguir facilmente a diferença entre competência e objetivo, visto que este último está mais direcionada para a disciplina.

Assim, com estes objetivos, pretende-se que o aluno seja capaz de melhorar as suas capacidades matemáticas, fomentando o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

Pretende-se ainda, que o aluno consiga comunicar as suas ideias, seja na forma escrita, quer oral.

Quanto aos conteúdos programáticos envolvidos neste módulo, são referidos os seguintes:

1. Funções Racionais

a) Motivação: estudo de relações numéricas concretas entre variáveis inversamente proporcionais.

b) Função racional.

c) Características e comportamentos de algumas funções racionais:

- $y = 1/(ax)$
- $y = 1/(ax^2)$
- $y = 1/[a(x-h)^2]$
- Assimptotas.
- Resolução de equações e inequações com frações no contexto de resolução de problemas.

2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação. (Qualificação, 2012)

3.5. Trabalho de investigação

A técnica de recolha de dados deste trabalho assenta no estudo de caso. Neste sentido, procura-se analisar os processos utilizados pelo aluno no que concerne a sua aprendizagem das funções, usando como apoio a calculadora gráfica TI-Nispire.

Ilustração 8 – TI-Nispire

(Calculadoras Gráficas utilizadas durante o trabalho de investigação)

O aluno sobre o qual incide este estudo de caso frequenta o segundo ano do curso Profissional Técnico de Informática de Gestão. Durante o trabalho de recolha de dados, foram várias as dificuldades sentidas por parte do investigador:

- O aluno revelou dificuldades em expressar-se de forma clara tanto oralmente, como através da escrita;
- O aluno necessitou de esclarecimento e exemplificação constante sobre o que lhe era perguntado;
- O trabalho de investigação decorreu na maioria dos casos, em sala de aula, com a restante turma presente.

Para defender o direito à sua privacidade, o aluno será designado por *Sebastião* ao longo do trabalho.

Foi fundamental, para o desenrolar da investigação, o apoio prestado por parte dos pais do aluno, os quais autorizaram a recolha de imagem, som e apontamentos.

Para conseguir responder a algumas das questões colocadas no início deste trabalho foi necessário esquematizar a investigação. Uma vez que o investigador conhecia o aluno em questão, foi possível preparar algumas atividades introdutórias, com o intuito de explicar o manuseamento da(s) calculadora(s) gráfica(s), explorando as suas potencialidades e em simultâneo a evolução das capacidades intuitivas do próprio aluno.

Este trabalho está assente em sete sessões de trabalho que decorreram em sala de aula com o aluno, organizadas da forma seguidamente apresentada.

1. _Primeira atividade_ - Idealizada com o intuito de ensinar a explorar as capacidades da calculadora (realizada durante a aula de 6 de janeiro de 2012).
2. _Segunda atividade_ – Desenvolvida com o objetivo de promover a autonomia do aluno ao nível da exploração das potencialidades da calculadora, tendo em conta o que já lhe tinha sido ensinado (implementada no dia 12 de janeiro de 2012);
3. _Terceira e quarta atividades_ – Avaliação da compreensão de processos matemáticos, como é o caso de assíntota ao nível da calculadora gráfica sendo esta uma atividade filmada (realizada durante a aula de 13 de janeiro de 2012);
4. _Quinta atividade_ – Avaliação da aplicação da calculadora gráfica, como ferramenta útil na interpretação do conceito de limite e sua interligação com o conceito de assíntota (implementada durante a aula de dia 3 de fevereiro de 2012);
5. _Sexta atividade_ - Serviu para fomentar a modelação matemática, tendo sido o aluno foi convidado a modificar valores de parâmetros previamente estudados até conseguir que o gráfico da função conseguisse conter todos os pontos mencionados (aplicada no dia 9 de março de 2012, durante a formação em contexto de trabalho do aluno);
6. _Sétima atividade_ – Levada para a sala de aula bastante mais tarde, serviu para avaliar se o aluno teria efetivamente adquirido as competências necessárias, pretendidas com todas as outras atividades, nomeadamente relacionar corretamente o modelo de função com o conjunto de pontos visíveis na calculadora (implementada no dia 9 de maio de 2012);

Ao longo da exploração das atividades o aluno é sempre convidado a realizar uma auto avaliação, procurando chamá-lo à atenção sobre as dificuldades sentidas e a sua capacidade de autonomia.

Ao longo da descrição das atividades é usada uma linguagem narrativa, visto que o aluno apresentou pouca conversação na resolução das atividades, analisando os dados observados em simultâneo.

No início da investigação, foi necessário explicar ao *Sebastião* algumas das funcionalidades básicas da calculadora, tais como:

- Explorar ficheiros pré instalados na calculadora;
- Arrastar e modificar a escala de gráficos para melhor visualizar a função;
- Explorar o conceito de assíntota, através da exploração de um gráfico;
- Identificar zeros e pontos de interseção com os eixos coordenados;

Capítulo 4. Análise de Dados

Ao longo deste capítulo encontra-se a descrição e análise dos dados recolhidos de todas as fontes. Salienta-se a importância da data em que foi aplicada a atividade, permitindo contextualizar a dimensão temporal da investigação realizada.

Como nota introdutória, salvaguardam-se eventuais falhas na linguagem científica aplicada nas atividades de investigação, visto que se pretendia uma simplificação da pergunta para o aluno, que revela grandes dificuldades de compreensão escrita.

As atividades de investigação aplicadas em sala de aula foram as seguintes:

a) Seis de janeiro – primeiros passos com a calculadora;
b) Doze de janeiro – verificação da aquisição dos conhecimentos sobre manuseamento da calculadora;
c) Treze de janeiro – duas mini atividades de investigação;
d) Três de fevereiro – conceito de limite;
e) Nove de março – modelação;
f) Nove de maio – modelação;

No que diz respeito à atividade introdutória de dia seis de janeiro, consistiu em explicar ao aluno as funcionalidades da calculadora.

4.1. Seis de janeiro - primeira atividade

Sebastião aceita com agrado a proposta de uma primeira atividade de investigação. O desafio consiste em explorar as funcionalidades da calculadora. No início é pedido que insira a função $f(x) = x^2 + 5x + 6$ na calculadora gráfica e que de seguida visualize no gráfico a sua representação. O aluno segura a calculadora TI-Nispire e após a ligar, seleciona corretamente o ícone referente aos gráficos das funções, inserindo de seguida a expressão mencionada. *Sebastião* consegue visualizar o gráfico da função, o que o deixa muito feliz, *"Professor, consegui"*.

De seguida é pedido que consiga encontrar, ao nível gráfico, os zeros e os pontos de interseção com os eixos coordenados. *Sebastião*, tal como é seu costume, pergunta: "*O que é para fazer aqui?"*. O investigador indica-lhe como chegar ao menu que permite descobrir cada uma das características pedidas na pergunta. O aluno observa atentamente a informação que é transmitida conseguindo compreender os caminhos que deverá percorrer para chegar aos resultados pedidos.

Para que *Sebastião* não perca interesse na atividade, é proposta a exploração de uma segunda função, parecida com a anterior: $f(x)=x^2+7x+12$. São colocadas as mesmas questões sobre esta nova função, às quais já consegue responder com autonomia. O aluno insere a função na janela apropriada e visualiza a sua representação gráfica com facilidade. De seguida dirige-se ao menu apropriado e seleciona a funcionalidade do "zero". Após definição do intervalo do gráfico, *Sebastião* diz *"Professor um dos zeros é -4, mas tem outro"*, e o investigador pergunta-lhe *"e consegues descobri-lo?"* O aluno pensa durante alguns segundos, e sem responder ao professor, como é seu hábito, segura a calculadora e procura resolver o problema. *Sebastião* volta ao menu, seleciona mais uma vez a opção do zero, mas agora opta por definir o intervalo um pouco mais ao lado e descobre o segundo zero: -3. Sebastião está muito feliz e dá uma grande gargalhada, mostra a calculadora ao professor e diz *"É -3 professor… é -3"*

Mas o aluno sabe que a atividade ainda não terminou e assim decide procurar a interseção da função com os eixos coordenados. No entanto, *Sebastião*, mesmo antes de começar informa *"Professor os zeros são destes pontos, sim?"*

Na realidade o aluno consegue perceber que os zeros já são pontos de interseção com os eixos, logo assume que uma parte do trabalho está feita. Decide então fazer uma procura do ponto em falta, acedendo ao menu referente ao valor da variável independente. Depois insere o valor "X=0", para obter a imagem deste ponto, de forma a conseguir descobrir as coordenadas do ponto de interseção com o eixo das ordenadas. "*Consegui professor, é 12*", diz *Sebastião* muito feliz por ter conseguido chegar ao resultado sozinho.

Esta é uma atividade com avaliação satisfatória, pois o aluno revela tanto interesse como capacidade de compreensão, logo os objetivos da primeira atividade são cumpridos. Nesta primeira atividade foram necessários cerca de 15 minutos para a sua realização. Como conclusão do trabalho realizado neste primeiro momento de recolha de dados, é possível identificar que esta atividade promoveu a génese instrumental, pois o aluno aprendeu a manusear algumas das funcionalidades da calculadora e a reconhece-la como um instrumento útil no seu processo de aprendizagem.

4.2. Doze de janeiro - segunda atividade de investigação

Neste segundo momento, é proposto ao aluno que realize uma atividade de investigação em torno das características das funções racionais. Para tal, fomenta-se a manipulação gráfica, permitindo ao aluno atribuir valores diferentes aos parâmetros da função, explorando as potencialidades da calculadora.

Sebastião pede que lhe empreste uma calculadora. De seguida liga-a e, consciente das suas capacidades, vai direto ao assunto. Seleciona a área dos gráficos na calculadora mas fica admirado, pois as expressões que tinha usado na aula passada ainda se encontram representadas. É então que pede ajuda, *"como faço para tirar isto?"*, pergunta *Sebastião*. Após ajuda por parte do investigador, começa por ler a primeira questão da atividade:

1. **Famílias de funções**: $y = \frac{1}{a.x}; a \in IR \setminus \{0\}$

Usando a calculadora gráfica, faz um esboço das seguintes funções racionais:

1.1. $y = \frac{1}{2.x}$

$a = \_\_\_ > 0$

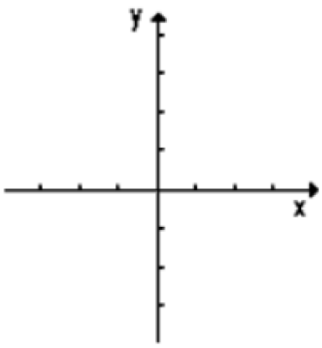


Ilustração 9 – Primeira Pergunta da Atividade de 12 de janeiro

Sebastião percebe que deverá representar graficamente a função dada e recorda o que lhe fora ensinado na aula de dia seis. Consegue com sucesso e seguindo os passos descritos na atividade anterior, chegar à representação gráfica da função, e identifica corretamente o valor de *a*, através de comparação com a expressão dada, tal como é visível na ilustração seguinte:

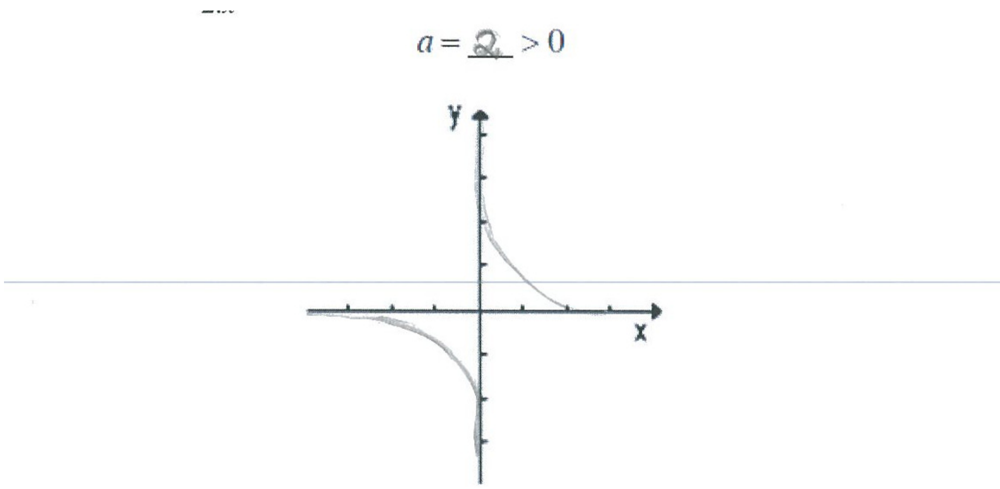


Ilustração 10 – Resposta do Sebastião à primeira pergunta

Passa para a pergunta seguinte, onde lhe é questionado se a função é crescente ou decrescente, e para completar com uma destas palavras a frase (ilustração 11).

1.1.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

1.1.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a > 0, então a função é _____________ em todo o seu domínio.*

Ilustração 11 – Características da primeira função estudada

No entanto *Sebastião* não compreende o conceito de monotonia e o investigador, explica-lhe a ideia associando-o ao movimento que a função faz ao nível gráfico de subir ou descer. Após esta explicação, informa o aluno que, no caso da pergunta 1.1.1, terá de assinalar a opção correta com um “*x*” e no caso da pergunta 1.1.2 terá de preencher o espaço com uma das duas opções: crescente ou decrescente.

Sebastião pensa um pouco enquanto observa o gráfico, e, de seguida responde:

1.1.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: X
- A função é crescente: ___

1.1.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a > 0, então a função é* decrescente *em todo o seu domínio.*

Ilustração 12 – Resposta do aluno sobre as características da primeira função

Após este resultado positivo, o investigador pergunta ao aluno porque optou por responder assim, ao qual *Sebastião* responde que o *“gráfico está a descer, logo é decrescente”*.

No caso das perguntas 1.1.4 e 1.1.5, *Sebastião* consegue resolver de forma rápida e eficaz, identificando no gráfico, onde estão as assimptotas da função.

Assim, responde sem hesitar:

1.1.3. O domínio da função é: IR \ {0}

1.1.4. O contradomínio da função é: IR \ {0}

Ilustração 13 – Domínio e contradomínio – Análise do gráfico de uma função

Sebastião usa uma grafia por imitação das representações tradicionais, no que concerne ao conjunto dos reais, no entanto, o investigador opta por não chamar a atenção do aluno, para não o baralhar. Ainda dentro da mesma pergunta, *Sebastião* é questionado sobre uma segunda função, mas, o aluno encontra agora um novo dilema: a existência de um número negativo.

Ao introduzir a expressão na calculadora, não comete erros, colocando o *“-3x”* dentro de parêntesis. Consegue, então, observar o gráfico e assim, representa-o na folha da atividade:

1.2. $y = \dfrac{1}{-3.x}$

$a = \underline{-3} < 0$

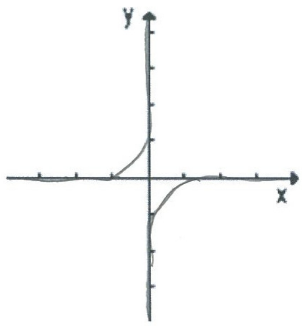


Ilustração 14 – Representação gráfica feita pelo aluno na pergunta 1.2

Quando chega às perguntas sobre as características da função, volta a questionar sobre o que tem de fazer agora. É explicado que deve assinalar a opção correta na 1.2.1 com uma cruz, e escolher uma palavra para completar a frase da 1.2.2.

Sebastião lembra-se do que tinha aprendido anteriormente, e responde da seguinte maneira:

1.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: _X_

1.2.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a < 0, então a função é* _crescente_ *em todo o seu domínio.*

Ilustração 15 – Características da função

Logo de seguida, o aluno afirma *"Professor, esta função está a subir… é crescente",* justificando a escolha que fez. No caso do domínio e contradomínio da função, *Sebastião* consegue chegar à resposta rapidamente, sem colocar qualquer questão.

1.2.3. O domínio da função é: IR \ {0}

1.2.4. O contradomínio da função é: IR \ {0}

Ilustração 16 – Domínio e contradomínio da segunda função do primeiro grupo

Com o intuito de analisar se o aluno teria entendido o conceito de monotonia é colocado um segundo conjunto de perguntas, em torno da função do tipo $y = \dfrac{1}{a.x^2}$; $a \in \text{IR} \setminus \{0\}$, seguindo as mesmas alíneas das perguntas anteriores. Assim, o aluno, rapidamente responde à primeira pergunta:

2.1. $y = \dfrac{1}{2.x^2}$

$a = \underline{2} > 0$

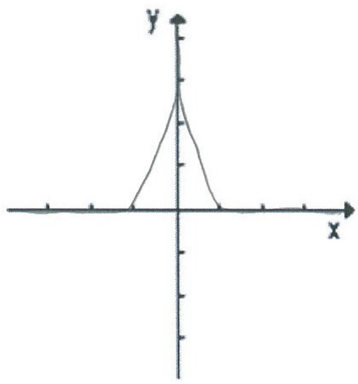


Ilustração 17 – Representação gráfica da função referida em 2.1

Mas *Sebastião* depara-se com um problema na segunda parte da pergunta 2., quando lhe é pedido para assinalar uma das opções: crescente ou decrescente.

Sem perguntar, opta por assinalar as duas hipóteses, justificando que no gráfico da função existem as duas situações, como é visível na ilustração anterior.

No caso da pergunta 2.1.2, o investigador decide verificar se o aluno já consegue entender o conceito de monotonia de uma função. Assim, formula uma questão para a qual não existe resposta, visto que a função em estudo não é monótona, mas será que o aluno irá responder? Quando a aluno lê a pergunta acha que existe um erro, pois não é possível usar as duas palavras em simultâneo, concluindo assim que a função não é crescente nem decrescente. *Sebastião* opta por escrever o seguinte na ficha da atividade:

2.1.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se $a > 0$, então a função é* ____________ *em todo o seu domínio.* errado

Ilustração 18 – Resposta à pergunta sobre monotonia da função

O investigador questiona-o do porquê de colocar a palavra errado, ao que o aluno afirma que a pergunta tem um erro, pois não é possível colocar as duas palavras num único espaço. De seguida é questionado sobre se a função será crescente ou decrescente e ao fim de alguns segundos *Sebastião* afirma que *"nem uma coisa nem outra"*.

Mas a pergunta 2.1 ainda não terminou, visto que é necessário o aluno reconhecer o domínio e contradomínio da função. É nesta altura que *Sebastião* fica com algumas dúvidas e por isso pensa um pouco antes de responder. Passados alguns segundos escreve na folha e diz *"Professor… Professor é assim não é?"*. De facto, o aluno acertou na resposta e felicita o aluno pela resposta que indicou com sucesso.

2.1.3. O domínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.1.4. O contradomínio da função é: $\mathbb{R}^+$

Ilustração 19 – Domínio e contradomínio da primeira função do segundo grupo

Nesta altura o aluno dá conta que ainda falta responder a um conjunto de perguntas sobre uma última função, antes de chegar à autoavaliação e terminar a ficha de trabalho. Mas desta vez é mais fácil visto que *Sebastião* já respondeu a perguntas parecidas.

Segura na calculadora e começa por eliminar a função que tinha inserido na questão anterior. Digita a expressão da nova função e observa o gráfico com atenção. Ao fim de alguns segundos copia o que vê na calculadora para a ficha de trabalho e identifica com clareza o valor do parâmetro *a*:

2.2. $y = \frac{1}{-3.x^2}$

$a = \underline{-3} < 0$

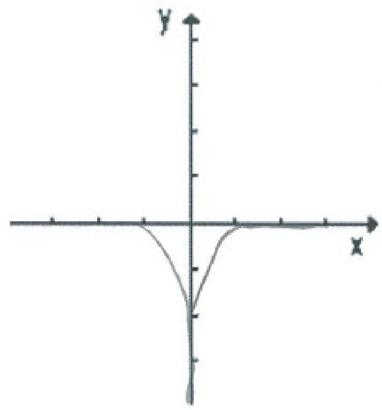


Ilustração 20 – Representação Gráfica da Função da referida em 2.2

Passando à questão referente à monotonia, mais uma vez o aluno acaba por assinalar as duas opções, visto que observa as duas situações presentes na representação gráfica da função estudada. Relativamente à pergunta onde se pretende completar com uma palavra, *Sebastião* volta a escrever *"errado"* na folha de respostas, tal como na pergunta anterior.

2.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: X
- A função é crescente: X

2.2.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a < 0, então a função é ____________ em todo o seu domínio.* errado

Ilustração 21 – Resposta à pergunta sobre monotonia da função

Sebastião está quase a terminar a ficha, bastando responder à pergunta sobre o domínio e contradomínio da função, onde ele não hesita em escrever uma resposta, usando como referência a função anterior.

2.2.3. O domínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.2.4. O contradomínio da função é: $\mathbb{R}^-$

Ilustração 22 - Domínio e contradomínio da segunda função do segundo grupo

Ao fim de 15 minutos, termina a sua atividade e diz *"Já está… e agora?"*. Após um reforço positivo, é pedido ao aluno que faça a autoavaliação.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora		X	
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora	X		
Reconhecer funções crescentes e decrescentes a partir do gráfico		X	
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico	X		
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico	X		

Ilustração 23 – Tabela de autoavaliação

Como conclusão, os objetivos programados e identificados na tabela anterior para esta atividade são atingidos com sucesso pelo aluno. É necessário ter em conta que o aluno já consegue entender algumas das funcionalidades da calculadora, aplicando-a na interpretação de características de funções, tirando conclusões sobre a alteração de parâmetros.

4.3. Treze de janeiro - terceira e quarta atividades de investigação

Este é um dia diferente, pois *Sebastião* dá conta que será filmado durante a aula. No início formaliza um elevado número de questões sobre o equipamento de filmagens que é levado para a aula. *Sebastião* ajuda a instalar o tripé, ficando muito satisfeito por ter participado na sua montagem, ficando mais à vontade com a presença do equipamento em sala de aula.

Assim que a câmara está pronta para as filmagens o aluno inicia a resolução da ficha de trabalho.

Sebastião começa por ler a atividade e pergunta se não é idêntica à da aula anterior. Efetivamente a pergunta corresponde à análise de uma função racional do tipo $y=\frac{1}{x-a}$, em particular da função $y=\frac{1}{x}$, sendo que deverá representá-la graficamente e indicar o valor do parâmetro *a*.

Sebastião liga a calculadora e introduz a expressão da função. Durante alguns segundos observa o gráfico na calculadora e sem hesitação, responde à primeira pergunta da ficha de trabalho:

1.1. $y = \frac{1}{x}$

$a =$ 0

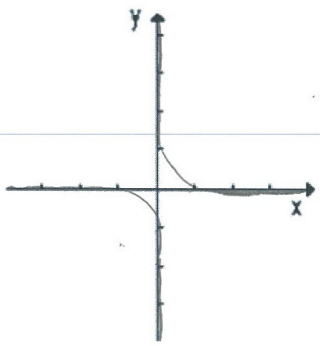


Ilustração 24 – Resposta à primeira pergunta da segunda atividade

O investigador dá conta que o aluno representou a função por cima dos eixos e questiona *"Passa por cima dos eixos?"*. No entanto, embora o aluno tenha observado o gráfico da calculadora durante alguns segundos, não dá resposta e avança para a pergunta seguinte. Por vezes, quando o aluno é chamado à atenção dos seus erros, tende a ignorar a correção.

Sebastião ao ler a pergunta 1.1.1. percebe que o que lhe é pedido é para verificar se a função em estudo é crescente ou decrescente, assinalando a opção com um *"x"*, e descrever o domínio e contradomínio da mesma. Não hesita e responde:

1.1.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: X
- A função é crescente: ___

1.1.2. O domínio da função é: $IR \backslash \{0\}$.

1.1.3. O contradomínio da função é: $IR \backslash \{0\}$.

Ilustração 25 – Análise da monotonia, domínio e contradomínio da primeira função

O reforço positivo é uma das estratégias utilizadas, com o intuito de motivar *Sebastião* a continuar o seu trabalho de pesquisa.

Ao chegar ao segundo grupo de perguntas, é pedido que analise graficamente a função $y=\frac{1}{x-3}$, mas, *Sebastião* encontra uma dificuldade: a expressão que aparece na calculadora não é igual à que se encontra na ficha. *"Bolas"* diz o aluno, *"Professor a expressão não está igual, e agora?"* É informado que necessita de colocar o denominador dentro de parêntesis, para que o "-3" também faça parte do denominador. Após a alteração proposta, *Sebastião* visualiza o gráfico da função.

Nessa altura, dá conta que o gráfico é diferente, afirmando que uma das assimptotas agora encontra-se noutro sítio.

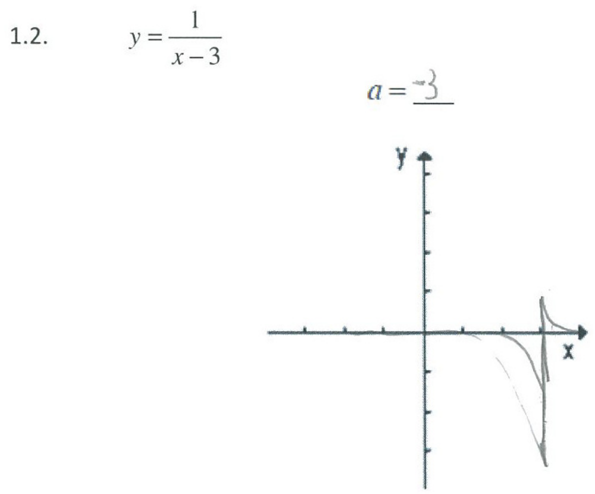


Ilustração 26 – Resposta à segunda pergunta da atividade

O investigador observa que o aluno tenta corrigir a representação do gráfico, visto que inicialmente acaba por passar em cima do eixo das abcissas, mostrando que entendeu a chamada de atenção que lhe fora feita na pergunta anterior.

Continuando a pergunta referente à análise da segunda função, *Sebastião* consegue, sem ajuda, chegar à resposta afirmando que o domínio seria diferente do exercício anterior, pois a assimptota já não se encontrava no mesmo sítio, como era visível na calculadora.

1.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: X

1.2.2. O domínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1.2.3. O contradomínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ilustração 27 – Características da segunda função

No entanto, como é possível observar pela resposta, o aluno seleciona de forma errada a monotonia da função.

Na pergunta seguinte, é proposto ao aluno que realize a mesma análise mas agora da função $y = \frac{1}{x+3}$. *Sebastião*, resolve a questão, repetindo os passos que realizara para a função anterior e representa o gráfico na folha, indicando o valor do parâmetro *a*:

1.3. $y = \frac{1}{x+3}$

$a = 3$

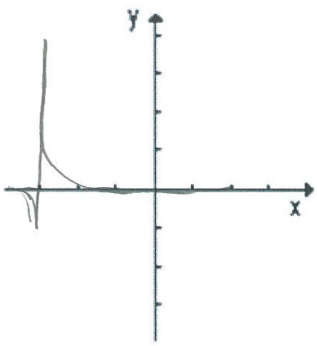


Ilustração 28 – Gráfico da terceira função

O aluno tenta manter a representação sem tocar no eixo das abcissas, mas não consegue, deixando a representação como se encontra na ilustração anterior.

De seguida, *Sebastião* passa para a pergunta referente à monotonia e da análise do domínio e contradomínio da função.

1.3.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: X
- A função é crescente: ___

1.3.2. O domínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

1.3.3. O contradomínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ilustração 29 – Características da terceira função

Por último, *Sebastião* preenche a ficha de auto avaliação, considerando que a sua autonomia foi exemplar:

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora	X		
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora	X		
Reconhecer as alterações no gráfico da função 1/x	X		
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico	X		
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico	X		

Ilustração 30 – Auto avaliação da primeira atividade do dia 13 de janeiro

Sebastião não está dispensado do trabalho, pois existe mais uma atividade a resolver. É colocada em cima da mesa a segunda atividade à qual o aluno reage de forma positiva, começando por ler o texto introdutório. A nova atividade desafia o aluno a procurar diferenças e semelhanças no gráfico de funções racionais. Para que isso aconteça é dado um conjunto de funções, as quais são associadas cores e pedido que o aluno as represente num único referencial, para que se aperceba das semelhanças e diferenças entre elas.

1. **Famílias de funções**: $y = \frac{1}{.x - a}; a \in \mathrm{IR}$ e $x \neq a$

   Usando a calculadora gráfica, e lápis de diferentes cores, faz um esboço das seguintes funções racionais:

1.1. $y = \frac{1}{x}$ (PRETO)

1.2. $y = \frac{1}{x-2}$ (VERMELHO)

1.3. $y = \frac{1}{x-4}$ (LARANJA)

1.4. $y = \frac{1}{x+3}$ (AZUL)

1.5. $y = \frac{1}{x+5}$ (VERDE)

Ilustração 31 – Pergunta relativa à comparação de funções racionais

No início, *Sebastião* pergunta o que é para fazer, visto que esta é uma atividade ainda não explorada pelo aluno. Assim que é informado das intenções da pergunta, inicia com satisfação a pesquisa com a calculadora gráfica e representa as diferentes funções na folha de trabalho. Enquanto manuseia a calculadora, o aluno vai eliminando as funções que já visualizou, para conseguir distinguir uma das outras. Como é possível observar na ilustração seguinte, *Sebastião* continua com algumas dificuldades em não representar as funções por cima do eixo das abcissas, no entanto, o investigador dá conta que o aluno faz um esforço por evitar esta situação.

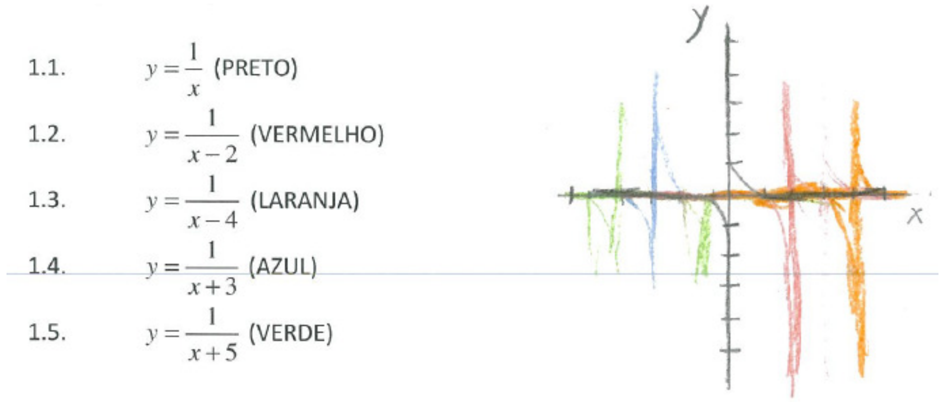


Ilustração 32 – Resposta à primeira pergunta da segunda atividade

Sebastião repara com facilidade que os gráficos sofrem uma translação, associada à mudança do valor numérico do denominador, e assim, ao ler a pergunta seguinte consegue chegar à seguinte resposta:

1.5.1. O que podes concluir sobre o valor de a?

- Se o valor ***a*** for positivo, a função desloca-se para a esquerda.
- Se o valor ***a*** for negativo, a função desloca-se para a direita.
- O domínio *altera-se / não se altera.*
- O contradomínio *altera-se / não se altera*

Ilustração 33 – Resposta quanto à importância do significado do valor do parâmetro ***a***

"Já está", afirma o aluno, com um grande sorriso. O investigador congratula-o mostrando o seu agrado pelo término das atividades propostas.

Assim, chega ao fim da atividade, sem revelar grandes dificuldades de compreensão, no entanto, são notórias algumas dificuldades de manuseamento do lápis, no que diz respeito à representação gráfica das funções. Por último, o aluno preenche a tabela de autoavaliação, onde *Sebastião* considera que a sua autonomia foi total.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora	X		
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora	X		
Reconhecer as alterações no gráfico da função 1/x	X		
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico	X		
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico	X		

Ilustração 34 – Autoavaliação da quarta atividade de investigação

Sebastião atinge, mais uma vez, os objetivos pretendidos com a ficha de trabalho proposta, e consegue utilizar a calculadora gráfica como uma ferramenta, permitindo-lhe visualizar com mais facilidade os gráficos das funções racionais, de que outra maneira seria impossível compreender a sua relação com a expressão da mesma. Durante estas atividades foi possível observar o fenómeno da instrumentalização, visto que o aluno aprofundou os seus conhecimentos das funcionalidades da calculadora, promovendo a fase da descoberta. A génese instrumental é assim uma realidade presente ao longo da atividade.

4.4. Três de fevereiro – quinta atividade de investigação

Esta é uma atividade que apresenta como objetivo fundamental a exploração de características das funções racionais já estudadas pelo aluno usando um ficheiro pré-instalado na calculadora. Durante esta atividade o aluno irá ser confrontado com a associação de parâmetros com a assíntota do gráfico, dando conta que a função não se encontra definida para esses valores. Outro objetivo da ficha é permitir ao aluno explorar a posição relativa dos pontos, visto que para certos valores da abcissa, terá de procurar com alguma exaustão a sua ordenada.

Importa referir que, para desenvolver esta atividade em concreto, o aluno foi instruído na aula anterior de como manusear um programa na calculadora, visto que *Sebastião* revela dificuldades de compreensão que o dificultam em termos de aprendizagem de forma imediata.

Assim, *Sebastião* começa por afiar o lápis, pois não se encontrava preparado para desenvolver o trabalho de investigação. De seguida, acede ao programa pré instalado na calculadora, mencionado na atividade proposta. A primeira pergunta pede ao aluno que aceda ao programa, dirigindo-se à página 1.4 e movimente o ponto "*a*" para a esquerda e para a direita e verifique que a expressão da função também se altera. *Sebastião* começa por ler o que lhe é questionado e dirige-se rapidamente para a página 1.4 como é sugerido na ficha de trabalho e dá conta da ilustração 35*:*

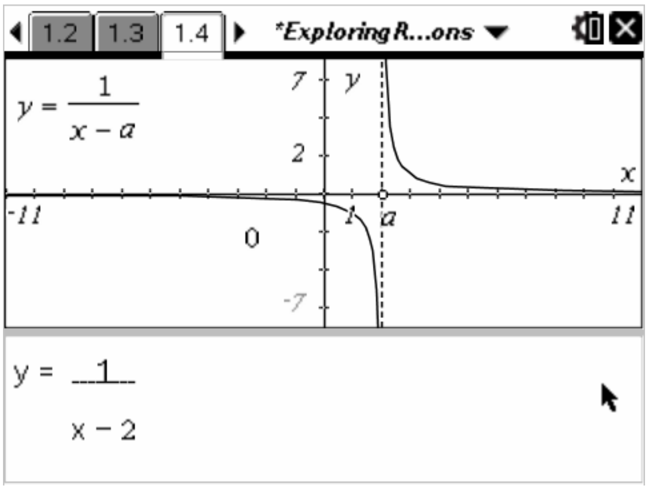


Ilustração 35 – Gráfico representativo de uma função racional (parâmetro a)

Nesta altura, o aluno pede ajuda ao investigador, o qual informa que deverá colocar o cursor no ponto "*a*", selecioná-lo e movimentá-lo até conseguir ver no monitor as expressões das funções mencionadas na ficha de trabalho, para conseguir responder às perguntas. *Sebastião* entende rapidamente o que lhe é dito e apodera-se da calculadora explorando a página sozinho.

No que diz respeito à primeira alínea, o aluno visualiza com facilidade a função proposta, mas no que concerne à segunda alínea, *Sebastião* afirma: *"Não consigo encontrar a expressão* $y = \dfrac{1}{x+1}$ *"*.

O investigador ajuda-o, informando-o que deve movimentar o ponto para a esquerda. Mas a expressão da calculadora não ajuda, visto que o que aparece é $y = \dfrac{1}{x - -1}$

Sebastião não fica preocupado, pois afirma *"Menos com menos dá mais… é igual"*. Por vezes, pronuncia algumas palavras impercetíveis, mas sempre que consegue chegar a alguma conclusão escreve na ficha de trabalho, acertando na alínea c), deduzindo a partir das alíneas anteriores. Termina assim a primeira questão associando a translação da função com o valor da resposta e presente no denominador da expressão da função.

Na página 1.4, segura no ponto ***a*** e arrasta-o para a esquerda e para a direita. Verifica que, conforme o valor de ***a*** se modifica, a equação e o gráfico atualizam.

1. a. Para que valor de x, a função $y = \dfrac{1}{x-2}$ não se encontra definida?

Resposta: 2

b. Para que valor de x, a função $y = \dfrac{1}{x+1}$ não se encontra definida?

Resposta: -1

c. Para que valor de x, a função $y = \dfrac{1}{x-a}$ não se encontra definida?

Resposta: a

Ilustração 36 – Resposta à primeira pergunta da quinta atividade de investigação

Após chegar ao fim da primeira pergunta, questiona se as respostas estão corretas e é informado que sim. *Sebastião* demonstra a sua felicidade com um enorme sorriso e uma pequena gargalhada.

Na questão 2, o aluno não compreende o que lhe é questionado, mas por opção é informado que não é necessário responder a esta questão, visto que é uma pergunta de desenvolvimento e de algum grau de complexidade escrita e o aluno revela muitas dificuldades nesta área.

O investigador opta por perguntar ao aluno o que acontece quando à linha a tracejado, quando o ponto *a* é movimentado no gráfico. Neste caso o aluno responde que também se movimenta.

No entanto, na terceira pergunta do primeiro grupo, visível na ilustração seguinte, *Sebastião* consegue responder sozinho e entende a generalização que lhe é pedida.

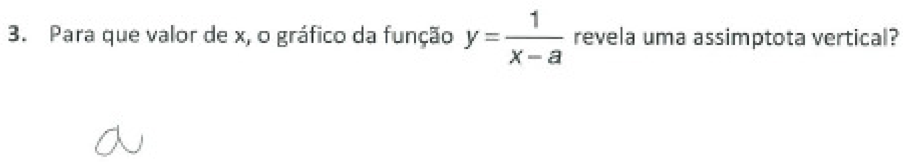


Ilustração 37 – Resposta à pergunta 3 do primeiro grupo

A ficha de trabalho direciona de seguida o aluno para a página 2.2 do programa instalado na calculadora gráfica, chegando assim ao segundo conjunto de perguntas da atividade. Nesta altura, o aluno encontra-se na página 2.2 do ficheiro e observa o ponto visível na calculadora. Pretende-se agora que o aluno movimente o ponto, de forma a conseguir encontrar a ordenada, sempre que é fornecido uma abcissa específica.

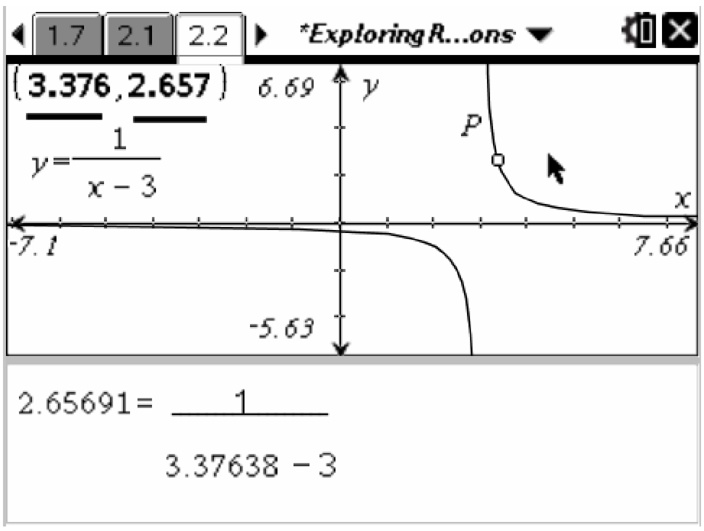


Ilustração 38 – Página 2.2 do ficheiro de investigação das funções racionais

No início, é pedido ao aluno que descubra a ordenada do ponto P, na situação onde a abcissa é 4. *"Que chatice"* diz *Sebastião*, *"Não consigo acertar no ponto"*, pelo que é informado que pode deixar o mais perto possível. No entanto o aluno não desiste e… consegue. A sua alegria é enorme: *"Professor, professor… consegui!"*, afirma *Sebastião*.

Mas a pergunta não terminou, pois é pedido que encontre ainda mais alguns valores. Assim, o aluno continua a resolver a questão, valor a valor, levando algum tempo a chegar aos resultados pretendidos. Alguns pontos tornam-se mais difíceis de encontrar do que outros, nomeadamente o último, afirmando que não vai dar. Mas, de facto consegue descobrir sozinho que o ponto "salta" para o lado esquerdo do monitor e continua a sua busca.

4. Observando a página 2.2 do problema, indica qual é o valor do y para cada um dos seguintes pontos:

(5, 0.5) (4, 0.9) (3.5, 1.9) (3.2, 5.02) (1, -0.5)

Ilustração 39 – Coordenadas de pontos de uma função racional

O aluno revela grande empenho, nunca desistindo de procurar a abcissa exata para cada um dos pontos, ficando um pouco frustrado quando não consegue encontrar à primeira o valor pretendido. Mas não para de procurar, movimentando o ponto assinalado na representação gráfica da função e quando chega ao resultado demonstra-o com grande entusiasmo.

Mas o verdadeiro desafio da atividade começa na questão 5, a qual pede ao aluno de uma forma pouco científica que explore o local do ponto da função que tem como abcissa 3,01. Como é visível verificar na ilustração 40, a pergunta é elaborada de forma direcionada, para que o aluno consiga entender o que é questionado, sem pedir ajuda.

5. Introduza 3,01 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o Gráfico ~~ponto~~ e puxa-o para baixo até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

y = 98.083

Ilustração 40 – Resposta à pergunta cinco

No entanto, *Sebastião* revela grandes dificuldades em entender como ver o ponto. Nesta altura é explicado ao aluno, como pode movimentar a escala do gráfico de forma a conseguir visualizar o ponto pretendido. Mas *Sebastião* não consegue ver o ponto e por isso a estratégia é alterada, optando-se por informá-lo de um outro processo – modificar o tamanho da janela. Após várias tentativas, consegue finalmente responder à pergunta e rapidamente passa para a pergunta seguinte sem qualquer hesitação.

No caso da pergunta seis, *Sebastião* consegue achar a solução, limitando-se a movimentar o ponto assinalado no visor mais uma vez.

6. Agora, introduz 2,99 para o valor do x do ponto *P*. Qual é o valor do y? Puxa o gráfico para cima até conseguires ver o ponto *P*.

Y = -98,07

Ilustração 41 – Resposta à pergunta seis

Quando *Sebastião* chega à pergunta sete, acha que não é possível encontrar o valor. Por isso opta por modificar, mais uma vez, a definição da janela. A certa altura o aluno afirma *"O ponto vai para baixo…ho, ho, ho, ho,…."*, mas consegue chegar a uma solução.

7. a. Consegues que o valor do y do ponto *P* seja igual a 1000? Se sim, qual será o x do ponto *P*?

0,001

b. Consegues que o valor do y do ponto *P* seja igual a -1000? Se sim, qual será o x do ponto *P*?

-0,001

Ilustração 42 – Resposta à pergunta sete

Sebastião não consegue responder à pergunta oito, visto não entender o que lhe é pedido, mas o investigador opta por não interferir nessa compreensão, por isso passa à resolução da pergunta seguinte, demorando cerca de 10 minutos a chegar à resposta das restantes questões.

8. Consegues criar o valor do y do ponto P tão grande quanto te pedirem? Como?

Não sei

Ilustração 43 – Resposta à pergunta oito

9. Observando a página 3.2 do problema, indica qual é o valor do y para cada um dos seguintes pontos:

(5,0,48) (13, 0,09) (23,0,05) (103,0,01) (1;0.5)

10. Introduza 503 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ponto e puxa-o para a esquerda até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

y = 0,002

11. Introduza -497 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ponto e puxa-o para a direita até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

y = 0,002

Ilustração 44 – Resposta às últimas três perguntas da atividade de investigação

Quando termina a atividade, *Sebastião* faz a autoavaliação, como sempre, achando que revelou bastante autonomia mas, pela primeira vez, não conseguindo chegar a conclusões relativamente a um dos objetivos da atividade.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas	X		
Movimentar os pontos na calculadora	X		
Identificar os valores do ***a***, no problema 1	X		
Identificar coordenadas dos pontos	X		
Tirar conclusões sobre as assimptotas das funções racionais			X

Ilustração 45 – Autoavaliação da quinta atividade de investigação

Esta é uma atividade onde o aluno se envolveu, conseguindo entender o dinamismo do gráfico que, sem o uso da calculadora gráfica, não seria possível.

Ao nível de processos matemáticos, o aluno não conseguiu adquirir muitas competências, à exceção da verificação que o ponto, por vezes, se aproximava do eixo das abcissas, logo justificando que este eixo é uma assíntota da função. Ao nível do manuseamento da calculadora, o aluno adquiriu algumas competências, no que diz respeito à janela de visualização do gráfico e no movimentar de pontos indexados a um gráfico. Percebeu também, que o gráfico da função é descontínuo, pelo que por vezes o ponto passa de uma hipérbole para a outra.

No entanto, *Sebastião* revelou alguma frustração na sua autoavaliação, considerando que não conseguiu atingir o último objetivo da atividade.

4.5. Nove de março – sexta atividade de investigação

Sebastião aguarda este momento com algum entusiasmo. Encontra-se em formação de contexto de trabalho, fora da sala de aula, a desenvolver trabalhos na área técnica da sua formação base – informática. É com grande satisfação que aceita a resolução de uma atividade de matemática, a sua disciplina favorita.

Assim, inicia a atividade, mas desta vez utiliza o computador em substituição da calculadora gráfica, com o intuito de gravar a atividade desenvolvida pelo aluno diretamente num ficheiro próprio para o programa TI-Nspire Student Software.

No início não compreende o que lhe é questionado, por isso é transmitida informação sobre o uso da folha de cálculo existente no programa. Encontra-se na ilustração 46 a pergunta que é colocada ao aluno:

A fábrica do senhor Francisco produz parafusos para a montagem de computadores.

Quantos mais parafusos produzem, mais barato fica a sua produção.

Observa a tabela seguinte que relaciona o número de parafusos produzidos e o respetivo custo de produção:

Nº de parafusos (milhares)	1	2	4	5	8
Custo de produção (euros)	100	50	25	20	12,5

1. Abre o ficheiro "Modelação Matemática" e insere os valores observados numa tabela.
   Designa por "p" os valores da primeira coluna e "C" os valores da segunda coluna.

Ilustração 46 – Primeira pergunta da atividade

O aluno consegue inserir na tabela do programa os valores existentes na ficha de trabalho, tal como é visível na ilustração 47.

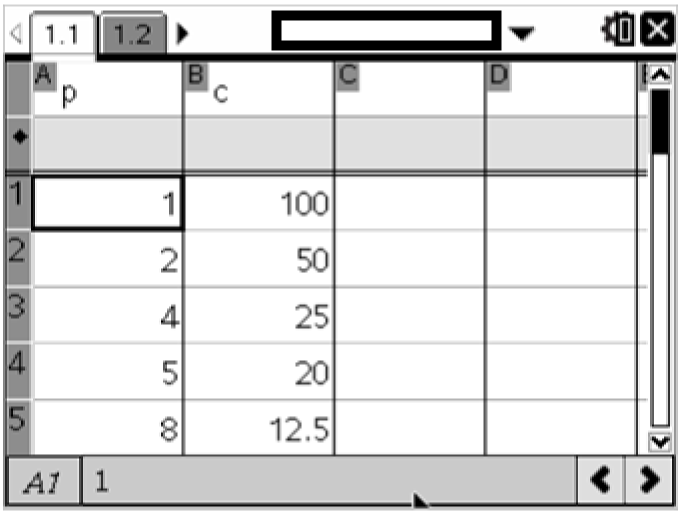


Ilustração 47 – Valores inseridos no programa, pelo aluno

Sebastião depara-se depois com um segundo desafio: como conseguir transpor esta informação para um gráfico. Após uma breve ajuda, consegue finalmente observar todos os "pontos" representativos do problema proposto.

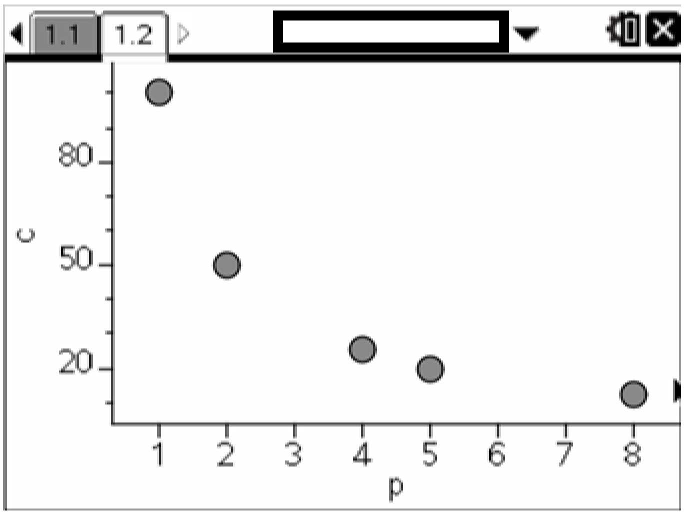


Ilustração 48 – Representação gráfica dos pontos referentes à atividade

"E agora?", pergunta *Sebastião*. Está na altura de explorar as suas capacidades de modelação. Assim, é explicado ao aluno a necessidade de representar no gráfico uma função do tipo $y = \frac{b}{x}$, e atribuir valores ao parâmetro *b*, para que o gráfico da função se

sobreponha aos pontos visíveis. *Sebastião* percebe o que lhe é pedido e atribui vários valores ao parâmetro.

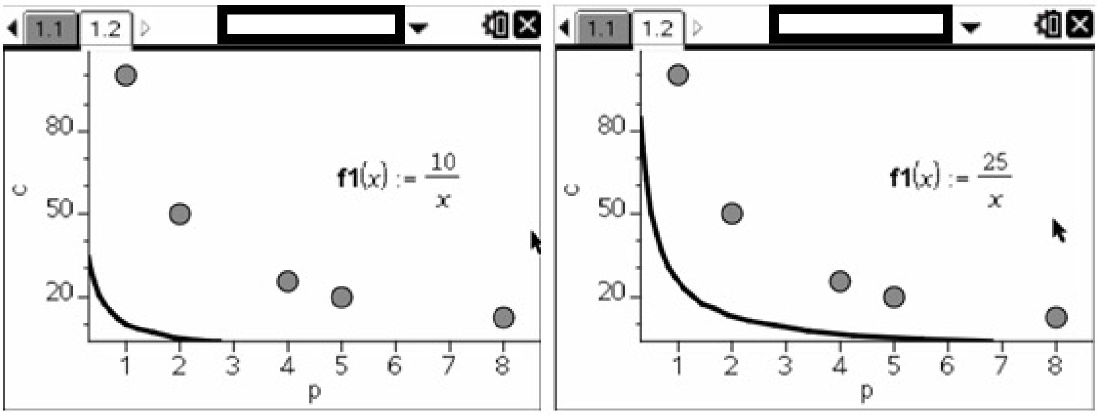


Ilustração 49 – Atribuição de valores ao parâmetro b

O aluno durante cinco minutos tenta atribuir diferentes valores ao parâmetro *b*. Seleciona a expressão da função f1 com a ajuda do cursor, e atribui valores diferentes ao numerador. Ao fim de algumas tentativas chega ao valor certo do parâmetro. *"Professor, consegui!"*, informa *Sebastião* com uma grande alegria e mostrando a calculadora ao investigador.

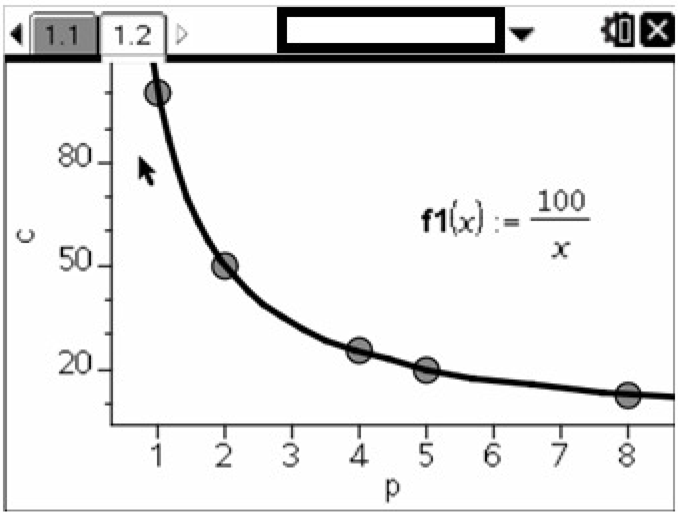


Ilustração 50 – Sebastião consegue descobrir o modelo que relaciona as duas variáveis

De seguida escreve na ficha de trabalho a expressão que acabou de descobrir.

3. Agora, representa no mesmo gráfico funções do tipo $y = \frac{b}{x}$, mudando o valor de b, até que a função se encontre em cima dos pontos representados anteriormente na pergunta 2.

$y = \frac{100}{x}$

Ilustração 51 – Modelo encontrado que simula a situação descrita

No entanto ainda existe uma pergunta, tendo como objetivo provar que o aluno consegue explorar o modelo encontrado, prevendo outras situações não descritas na tabela.

4. Agora, com a expressão que encontras-te, determina o custo, se o senhor Francisco produzir 10 mil parafusos.

Ilustração 52 – Pergunta quatro da ficha de trabalho

Sebastião pergunta "*Tenho de substituir o x ou o y da expressão?",* mas o investigador opta por lhe questionar sobre qual das variáveis corresponde o valor atribuído na pergunta, sendo que o aluno identifica a primeira variável como a opção correta. Assim, consegue perceber de imediato o que fazer, substituindo a variável *x* pelo valor 10.

4. Agora, com a expressão que encontras-te, determina o custo, se o senhor Francisco produzir 10 mil parafusos.

$y = \frac{100}{10}$

R: O custo é de 10 euros

Ilustração 53 – Resposta do aluno à pergunta da aplicação do modelo

O aluno chega ao fim da atividade, preenchendo a avaliação.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas		X	
Inserir os valores na calculadora	X		
Representar os pontos num gráfico, usando a calculadora	X		
Identificar a função correta que modela o problema		X	
Fazer previsões, usando o modelo encontrado		X	

Ilustração 54 – Tabela de autoavaliação da ficha de trabalho

Esta atividade revela-se um sucesso, visto que o aluno consegue adquirir os objetivos propostos na tabela anterior, embora com um pouco de ajuda na compreensão das perguntas.

O aluno consegue perceber que os valores da tabela correspondem a momentos específicos, os quais podem ser unidos por uma linha ao qual chamamos de função e com a qual é possível prever outras situações que não se encontram descritas no problema, ou seja, realizar previsões.

4.6. Nove de maio – sétima atividade de investigação

Esta é a última atividade. Decorre passado dois meses da última recolha de dados, pois tem como objetivo analisar a capacidade do aluno em reter informação já explorada em outras atividades de sala de aula.

Sebastião inicia a sua atividade com muita atenção. A primeira página da atividade informa o aluno sobre três tipos de funções e suas respetivas representações gráficas: função afim, função quadrática e função racional. Lê com atenção a primeira pergunta e questiona se é para colocar os valores na calculadora, ao qual o investigador afirma que sim.

Representa os pontos das seguintes tabelas no computador/calculadora, e escolhe o modelo que mais se parece com a distribuição dos pontos no gráfico.

X	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y	6	2	0	0	2	12	20	30

Ilustração 55 – Primeira pergunta da atividade

O aluno coloca os valores da primeira tabela numa folha de cálculo da calculadora e dá conta que está perante um modelo quadrático. Devido à grande quantidade de combinações possíveis para os valores dos parâmetros ***a***, ***b*** e ***c***, o investigador indica que na questão que só podem assumir um dos seguintes valores: 1, 2 ou 3.

Experimenta atribuir valores às letras a, b e c (entre 1 e 3) e identifica o modelo que representa cada conjunto de pontos.

Ilustração 56 – Pergunta dois da ficha de trabalho

De seguida, *Sebastião* insere expressões quadráticas, alterando os valores de ***a***, ***b*** e ***c*** até conseguir que os modelos se sobreponham a todos os pontos que aparecem no gráfico.
Inicia a sua busca começando por atribuir o mesmo valor a todos os parâmetros: número um. Como verifica que não corresponde à função pretendida opta por alterar os valores, tirando notas numa folha das situações verificadas. Chega finalmente à solução perfeita por tentativa e erro: $f(x) = x^2 + 3x + 2$.
Fica muito satisfeito com a sua conquista, e expressa a sua felicidade com uma gargalhada. Escreve a expressão da função encontrada na folha da ficha de atividade.

Passa rapidamente para a segunda tabela e repete todo o processo já aplicado. Quando visualiza o gráfico dá conta que está perante um modelo racional. Sem qualquer comunicação verbal, o aluno consegue, após várias tentativas, descobrir o modelo racional adequado: $f(x) = \dfrac{3}{x+3}$. Chega assim à última tabela.

Sebastião ganha a sua autonomia, desenvolvendo o seu trabalho sem apresentar qualquer questão. Volta à folha de cálculo e insere os novos valores na tabela. De seguida observa o gráfico e afirma que o novo modelo será do tipo afim.

Inicia o processo de modelação, substituindo os parâmetros por valores até conseguir atingir o objetivo fixado: o modelo deverá conter todos os pontos apresentados no gráfico. Ao fim de um minuto consegue chegar a uma conclusão: $f(x) = 2x + 1$.

Experimenta atribuir valores às letras a, b e c (entre 1 e 3) e identifica o modelo que representa cada conjunto de pontos.

$f_1(x) = 1x^2 + 3x + 2$

$f_2(x) = \dfrac{3}{1x+3}$

$f_3(x) = 2x + 1$

Ilustração 57 – Modelos encontrados pelo aluno como resposta às situações apresentadas

Por fim, *Sebastião* passa a autoavaliação, preenchendo com determinação a tabela no verso da ficha de trabalho.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas		X	
Inserir os valores na calculadora		X	
Representar os pontos num gráfico, usando a calculadora	X		
Identificar a função correta que modela o problema	X		

Ilustração 58 – Tabela de autoavaliação da ficha

Esta atividade de investigação foi terminada ao fim de 30 minutos, sendo que o aluno revelou bastante facilidade na sua resolução, identificando o tipo de modelo a usar em cada um dos casos e determinação em descobrir a condição correta que simularia a situação descrita em cada uma das tabelas.

No fim, *Sebastião* conseguiu utilizar a calculadora de forma autónoma, não requisitando ajuda ao investigador. Os objetivos identificados na tabela da ilustração anterior foram atingidos pelo aluno.

Capítulo 5. Conclusão

Neste ponto do trabalho, apresenta-se uma breve síntese da investigação desenvolvida, tendo em consideração as questões levantadas e os principais objetivos definidos para esta investigação. São também retiradas conclusões sobre a investigação, tendo em conta a revisão teórica do capítulo dois e a análise de dados descrita no capítulo quatro.

5.1. Síntese do Trabalho Desenvolvido

Ao longo deste trabalho, analisou-se o impacto que o uso das novas tecnologias teria na compreensão da matemática em alunos com Síndrome de Asperger.

Foram formuladas questões no início deste projeto, às quais se pretende dar resposta com as conclusões da investigação realizada.

As questões colocadas são:

a) Qual o papel das tecnologias na compreensão/conexão de processos matemáticos?

b) Até que ponto o modo de pensamento matemático que o aluno gera é potenciado pelo uso de tecnologias?

c) Como é que as novas tecnologias influenciam a aprendizagem de novos processos matemáticos em alunos com síndrome de Asperger?

No entanto, é necessário mencionar a importância que os restantes pontos do trabalho apresentam no enquadramento da realidade, tanto do aluno, como da metodologia aplicada em sala de aula.

A natureza das questões colocadas no início deste trabalho permite uma análise dos dados recolhidos de forma qualitativa, baseando-se num estudo de caso, explicitados no capítulo três deste trabalho.

O aluno selecionado para a realização deste trabalho frequenta o segundo ano do curso Profissional de Técnico de Informática de Gestão e é aluno do investigador em causa.

Na análise do cumprimento dos objetivos desta investigação foram tidos em conta:

(i) a compreensão demonstrada pelo aluno das questões colocadas;

(ii) o uso das tecnologias no apoio à resolução das atividades propostas;

(iii) aprendizagem do domínio das novas tecnologias, como ferramenta de apoio; (iv) compreensão e autoavaliação da autonomia do aluno na resolução das atividades.

5.2. Conclusões do estudo

Pretende-se neste ponto dar respostas às perguntas formuladas no início deste trabalho de investigação, tendo em conta a recolha de dados realizada junto do aluno.

5.2.1. Potenciação do pensamento matemático através do uso de tecnologias

A conexão desenvolvida pelo aluno durante as atividades de investigação, foi, sem dúvida, potenciada pelo uso das novas tecnologias. Esta afirmação é comprovada quando o aluno consegue explorar um ficheiro associado ao uso da calculadora gráfica, e se apercebe da complexidade das relações existentes entre duas variáveis de uma função. Chega mesmo a certa altura a achar que a assintota é um "problema", que o impossibilita de explorar o gráfico, mas rapidamente entende que é apenas uma questão de continuar, modificando valores da expressão algébrica, tal como é possível observar na ilustração seguinte, referente à segunda atividade, onde o aluno representa num mesmo referencial várias funções racionais, apercebendo-se da alteração de um valor, responsável pelo local da assintota.

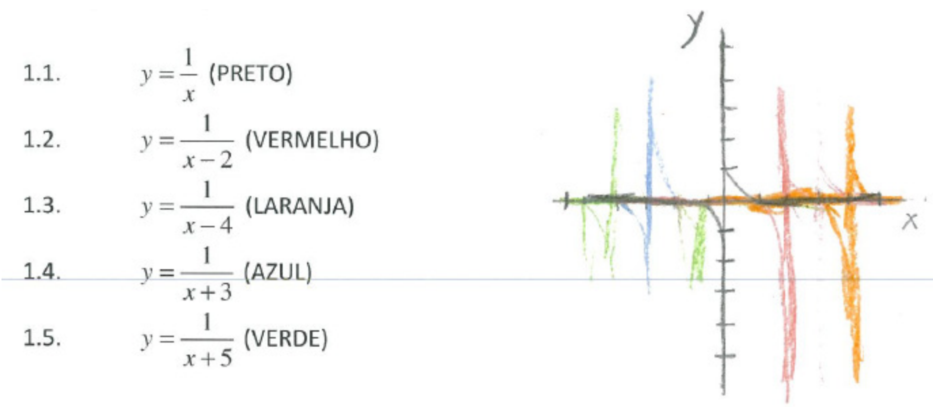


Ilustração 59 – Resposta à primeira pergunta da segunda atividade

Por outro lado, no caso da modelação matemática, o aluno vê o seu pensamento potenciado, visto que consegue associar com facilidade informação existente numa tabela, convertendo-a para um gráfico através de representação de pontos, que, por sua vez, consegue associar a uma sequência semelhante ao aspeto gráfico de um modelo matemático previamente estudado (afim, quadrático ou racional), como é visível na ilustração seguinte, onde o aluno descobre a condição da função correta que contem todos os pontos representados.

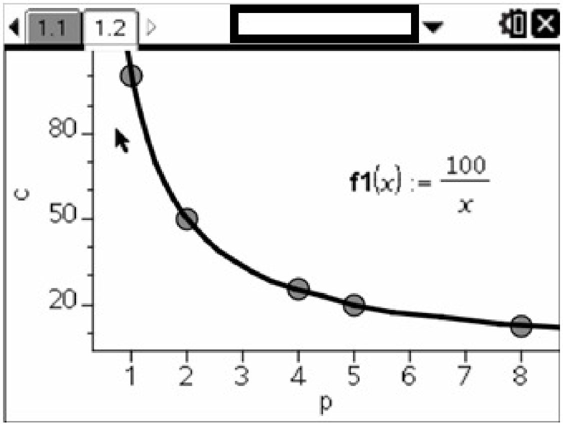


Ilustração 60 – Sebastião consegue descobrir o modelo que relaciona as duas variáveis

5.2.2. Papel das Tecnologias como apoio na aprendizagem da matemática em alunos com Síndrome de Asperger

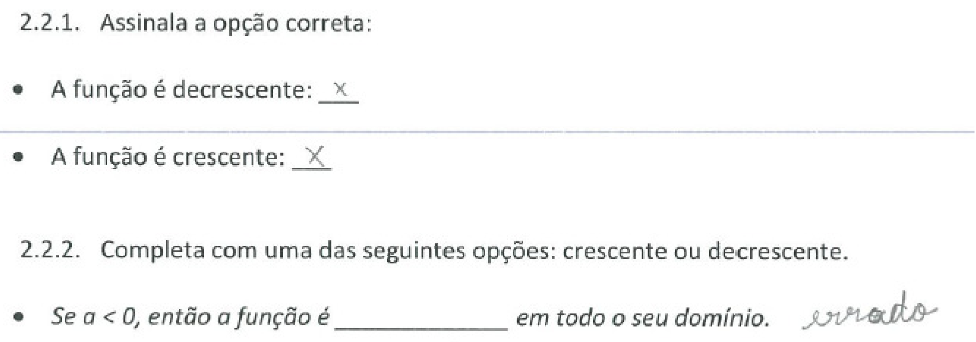
Um dos conceitos que o aluno identifica ao nível gráfico, com alguma facilidade é a do domínio. A sua compreensão do *conceito de domínio* é visível, quando, após a visualização do gráfico de uma função racional deteta uma linha imaginária, (assintota), que desempenha um papel fundamental na identificação do domínio.

2.2.3. O domínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.2.4. O contradomínio da função é: $\mathbb{R}^-$

Ilustração 61 - Domínio e contradomínio da segunda função do segundo grupo

Por outro lado consegue rapidamente associar o aspeto gráfico de uma função representada numa calculadora ou num computador com a sua representação algébrica, criando e modificando parâmetros para que o modelo seja representativo de uma situação particular, conectando assim vários processos matemáticos.
Importa ainda referir que o conceito de monotonia, no que diz respeito ao aspeto gráfico encontra-se assimilado pelo aluno, quando ele associa a palavra *"crescente"* a um gráfico que *"sobe"* e a palavra *"decrescente"* ao que *"desce"*, dando importância à inexistência de monotonia, quando o gráfico revela mais do que um tipo de variação.



2.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: _X_
- A função é crescente: _X_

2.2.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a < 0, então a função é _____________ em todo o seu domínio.* errado

Ilustração 62 – Resposta à pergunta sobre monotonia da função

Neste sentido a calculadora gráfica desempenhou um papel fundamental, visto que o aluno conseguiu observar o gráfico associado a uma expressão, sem que para isso tivesse de assumir a relação entre os dois por um processo analítico.
Mas o aluno revela um índice de aprendizagem desfasado, relativamente ao grau académico em que se encontra. Em termos de processos, aprende rapidamente e repete com facilidade o que aprendeu, por vezes modificando pequenos passos, consoante a pergunta que é realizada. No entanto, na compreensão de um problema, a situação é diferente: o aluno revela grandes dificuldades de compreensão, pelo que o professor tem de explicar de forma direta ao aluno o que fazer, ficando a dúvida se o aluno consegue entender a pergunta, ou mesmo o problema que é colocado.
Neste campo, notam-se melhorias: o aluno esforça-se, lendo a questão, pensa numa possível resposta, e só quando não consegue compreender é que solicita a ajuda do professor, desenvolvendo a autonomia e competências transversais, imprescindíveis na formação que frequenta. Mas importa referir que existirão outros fatores para além do

uso das tecnologias que promoveram as melhorias observadas: gosto do aluno pela disciplina, apoio por parte dos colegas da turma, ambiente propício ao processo de aprendizagem, etc.

5.2.2.1. A Génese Instrumental em alunos com síndrome de Asperger

De facto o aluno reagiu segundo o que se encontra descrito na génese instrumental, aprendendo claramente algumas das funções da calculadora para encontrar a solução questionada em algumas perguntas. Esta aprendizagem ocorre naturalmente, mas é possível distinguir claramente os efeitos da Instrumentalização: o aluno adquire e aprende as funções da calculadora e reconhece processos que o ajudam a chegar à resposta pretendida, tal como é possível verificar na análise das ilustrações seguintes, onde o aluno consegue aproveitar a informação de uma tabela para representar pontos num gráfico.

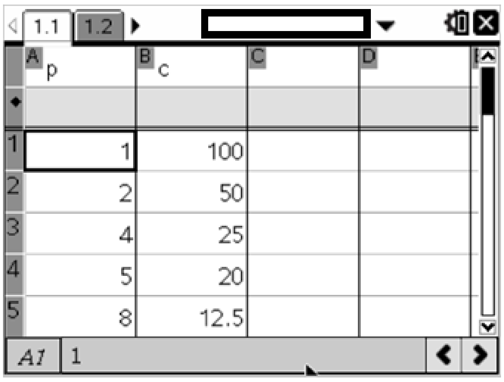


Ilustração 63 – Valores inseridos no programa, pelo aluno

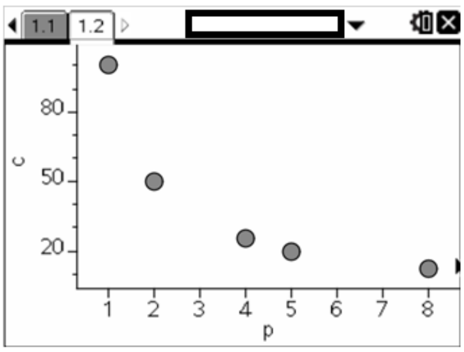


Ilustração 64 – Representação gráfica dos pontos referentes à atividade

No entanto, o aluno não termina aqui a sua aprendizagem, manipulando a calculadora de forma inversa, explorando a seu belo prazer as suas funções de forma a chegar a algumas conclusões interessantes, tal como as que foram observadas na última das atividades. Neste caso ocorre a Instrumentação, onde o aluno utiliza a calculadora e manipula-a de forma a chegar às conclusões que pretende.

Como conclusão, é possível afirmar que a investigação promoveu a génese instrumental, tanto no sentido da Instrumentalização, como no sentido contrário da Instrumentação.

5.3. Considerações Finais

Não é possível generalizar as conclusões obtidas durante este trabalho, pois é bastante reduzido o universo no qual é baseado.

Este é um trabalho cuja análise é feita de forma descritiva (Yin, 1984) e procura essencialmente melhorar ao professor pesquisar novas metodologias apoiadas em tecnologias para melhorar a aprendizagem do aluno em causa., permitindo ainda iniciar uma discussão mais abrangente, promovendo um estudo mais alargado sobre o tema em causa.

O estudo em si revela, de forma geral, resultados positivos, incentivando uma continuação do trabalho realizado até aqui em sala de aula com o aluno, visto que adquiriu novas competências, autonomia, melhorou o seu raciocínio lógico e a compreensão.

Utiliza hoje a calculadora como uma ferramenta de apoio, permanecendo na fase da instrumentação, onde a calculadora ainda revela algumas limitações que, por vezes, o aluno ainda não consegue superar ou adaptar às suas necessidades.

Assim a Génese Instrumental referenciada por Rabardel (1995) é um caminho que leva algum tempo a ocorrer e deverá ser trabalhado de uma forma sistemática e consistente, para que o aluno ultrapasse as suas dificuldades de compreensão.

No entanto, se pensarmos nas fases de aprendizagem destacadas por Sfard (1991), o processo de aprendizagem encontra-se bem cotado: o aluno consegue interiorizar processos e condensá-los, falhando apenas por vezes na última etapa do processo, a reificação. Será eventualmente nesta fase que o professor deverá desempenhar um papel crucial, como mediador, (Vygotsky, 1978), visto que enquanto o processo de aprendizagem não se completa, o aluno não consegue avançar para um novo patamar de aprendizagem.

No entanto, devido ao Síndrome Asperger, a sua evolução será sempre limitada ao seu próprio ser. Esta doença direciona a sua atenção para ele próprio, ignorando a existência do próximo.

Embora o aluno consiga interagir com alguns colegas, de facto essa interação é limitada à brincadeira repetitiva e sistematizada.

Neste ponto o que Hannula (2011) identifica como sendo uma parte importante na formação completa do individuo falha: a interligação entre o social e o individual não está presente no aluno, ignorando por vezes a presença dos colegas e mesmo de alguns professores em sala de aula.

Mas, com tempo, dedicação e uso de novas metodologias acompanhadas do apoio das tecnologias, é previsível que a matemática seja melhor compreendida pelo aluno.

Bibliografia

- APSA. (2012). *APSA - Associação Portuguesa do Síndrome de Asperger*. Obtido em 10 de Janeiro de 2012, de http://www.apsa.org.pt/sa.php
- Biembengut, M. S. (1997). *Qualidade de Ensino de Matemática na Engenharia: uma proposta metodológica e curricular*. Florianópolis, Brasil.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In A. G. B.Christiansen, *Perspectives on mathematics education* (pp. 309 - 365). Dordrecht: Reidel.
- Bogdan R., Biklen S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação.* Portugal: Porto Editora.
- Caraça, B. d. (1933). *EPBJC - Porto*. Obtido em 12 de fevereiro de 2012, de Escola Profissional Bento de Jesus Caraça - Delegação do Porto: http://www.epbjc-porto.net/bjc/citacoes.html
- Cohen, L. (2005). *Research methods in education / Louis Cohen, Lawrence Manion, and Keith Morrison.* RoutledgeFalmer.
- Diário da República 183/21 janeiro, D. 1. (21 de janeiro de 2006). Decreto Lei nº 183 - 21 de janeiro de 2006. Portugal.
- Diário da República 26/1989, D. 2. (1989). Portugal.
- Diário da República 3 janeiro, D. (2008). Decreto Lei de 3 de janeiro. Portugal.
- Domingos, A. (2003). *Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados - A Matemática no Início do Superior*. Lisboa, Portugal.
- Edwards & Hamsom. (1990). *Modelação - A Matemática ajuda a compreender a realidade*. Obtido em 2 de maio de 2012, de http://portfoliomatematica.no.sapo.pt/modelacao1.htm
- Edwards D., Hansom M. (1990). *Guide Modelling.* CRC Press.
- EPBJC. (2010). *Uma Escola Para a Vida, Escola Profissional Bento de Jesus Caraça.*
- Eynde, P. O. (2007). *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Chipre

- Fernandes C., Costa J., Ferreira S. (2000). *Funções - Um pouco de História*. http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/hist.htm
- Gauderer, E. C. (1993). *Autismo.*Brasilia, Corde
- Gray, E., & Tall, D. (1994). "Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic" *in Journal for Research in Mathematics Education, 26* (pp. 115 - 141).
- Guin, D. &. Trouche L. (1999). *The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators.*
- Hannula M., Pantziara M., Wæge K. & Schlöglmann;. (2009). *Introduction: Multimethod approaches to the multidimensional affect in mathematics education*. *CERME 6*, (pp. 28 – 33). Lyon - France.
- Hannula, M. S. (2011). *The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning,*Helsínquia,
- Hannula, M.S., Op 't Eynde, P., Schlöglmann, W & Wedege, T. (2007). *Affect and mathematical thinking. European Research in Mathematics Education V, Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, p. 204.
- Hitchcock G., Hughes D. (1995). *Research and the Teacher (second edition).* Londres: Routledge.
- Johnson, D. &. (1990). *Cooperative learning in mathematics.* S. Francisco: Addison-Wesley.
- Leal, S. (1999). *Universidade Federal de Santa Catarina.* Obtido em 29 de agosto de 2012, *in* http://www.eps.ufsc.br/disserta99/leal/
- Lello. (1980). *Lello Escolar.* Porto: Lello & Irmãos - Editores.
- Lira, S. M. (2004). *Escolarização de alunos autistas: histórias de sala de aula. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação* . Rio de Janeiro, Brasil.
- Maki, Thompsom. (1973). *A Modelagem como Estratégia de Aprendizagem Matemática em Cursos de Aperfeiçoamento de Professores*.
- Martins, M. R. (2007). *Inclusão de alunos autistas no ensino regular: concepções e práticas pedagógicas de professores regentes.* Obtido em 05 de 09

de 2012, Dissertações - Universidade Católica de Brasília: *in* http://www.bdtd.ucb.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=692

- Nisbet J., Watt J. (1984). *Conducting Small-scale Investigations in Educational Management.* Londres: Harper & Row.
- Oliveira, M. A. (1984). *Moderna Enciclopédia Universal - Tomo II.* Lisboa, Círculo de Leitores.
- P. Davis & R. Hersh. (1985). *A experiência matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alves.
- Ponte, J. P. (2005). "*O professor e o desenvolvimento curricular*" *in* J. P. Ponte, *Gestão curricular em Matemática* (pp. 11 - 34). Lisboa: APM.
- Qualificação, A. N. (2012). *Programa da Disciplina de Matemática*. Obtido em Janeiro de 2012, de Agência Nacional para a Qualificação: *in* http://www.anqep.gov.pt/default.aspx
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.
- Reis, M. (2011). http://ama-autismo.pt/
- Sajka, M. (2003). *A secondary school student's understanding of the concept of function: a case study.*
- Sfard, A. (1991). *On the dual nature of Mathematical concepts: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.*
- Silva, J. C. (2012). Obtido em 2 de maio de 2012, *in* http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/model.html
- Simons, H. (1996). *The paradox of case study.* Cambridge: Journal of Education.
- Sturman, A. (1997). *Educational Research, Methodology and Measurement.* Oxford.
- Sturman, A. (1999). *Issues in Educational Research.* Oxford: Elsevier Science Ltd.
- Swetz F., Hartzler J. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum: A resource guide of classroom exercises.* National Council of Teachers of Mathematics.

- Swetz, F. (1992). *Quando e Como Podemos usar Modelação?* Lisboa: Educação e Matemática.
- Trouche, L. (2004). *Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? Educational Studies in Mathematics.*
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard: Harvard Uninersity Press.
- Yin, R. K. (1984). *Case Study Research: Design and Methods.* Beverly Hills: Sage Publications.

ANEXOS

Anexo I - Atividade de dia 12 de janeiro

Esta ficha de trabalho tem como objetivo analisar as características de funções racionais do tipo:

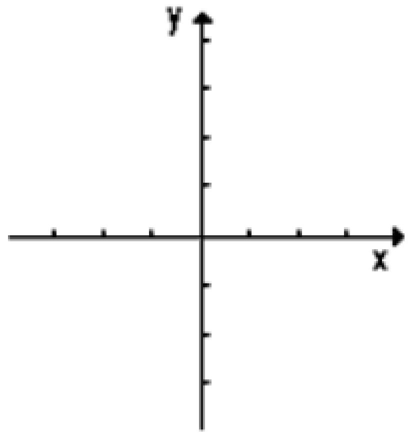
$$y=\frac{1}{ax},\ y=\frac{1}{ax^2}\ \ e\ \ y=\frac{1}{a(x-h)^2};\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

1. **Famílias de funções**: $y=\frac{1}{a.x}$; $a\in IR\setminus\{0\}$

Usando a calculadora gráfica, faz um esboço das seguintes funções racionais:

1.1. $y=\frac{1}{2.x}$

$a=$ ___ >0



1.1.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

1.1.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

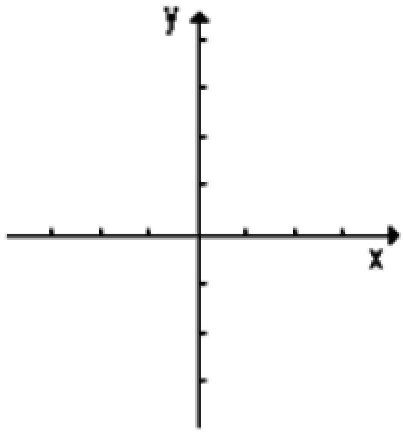
- *Se a > 0, então a função é* _____________ *em todo o seu domínio.*

1.1.3. O domínio da função é: _______________

1.1.4. O contradomínio da função é: ________________

1.2. $y = \dfrac{1}{-3.x}$

$$a = \_\_\_ < 0$$



1.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

1.2.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a < 0, então a função é* _____________ *em todo o seu domínio.*

1.2.3. O domínio da função é: ______________

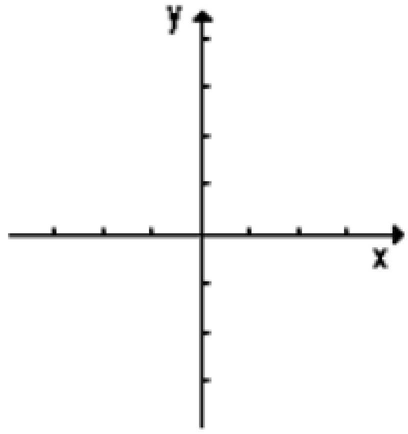
1.2.4. O contradomínio da função é: _______________

2. **Famílias de funções**: $y = \dfrac{1}{a.x^2}$; $a \in IR \setminus \{0\}$

Usando a calculadora gráfica, faz um esboço das seguintes funções racionais:

2.1. $y = \dfrac{1}{2.x^2}$

$a = \_\_\_ > 0$



2.1.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

2.1.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

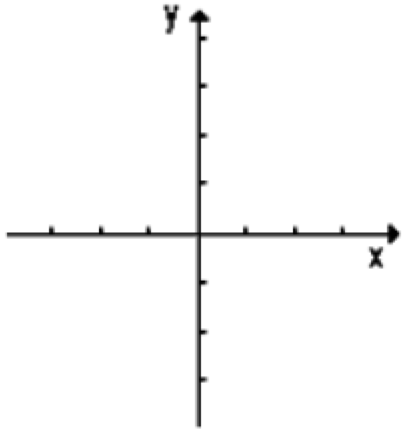
- *Se a > 0, então a função é* _____________ *em todo o seu domínio.*

2.1.3. O domínio da função é: ______________

2.1.4. O contradomínio da função é: _______________

2.2. $y = \frac{1}{-3.x^2}$

$$a = \_\_\_ < 0$$



2.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

2.2.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a < 0, então a função é _____________ em todo o seu domínio.*

2.2.3. O domínio da função é: ______________

2.2.4. O contradomínio da função é: _______________

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objetivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora			
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora			
Reconhecer funções crescentes e decrescentes a partir do gráfico			
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico			
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico			

Anexo II - Atividade de dia 13 de janeiro

Esta ficha de trabalho tem como objetivo analisar as características de funções racionais do tipo:

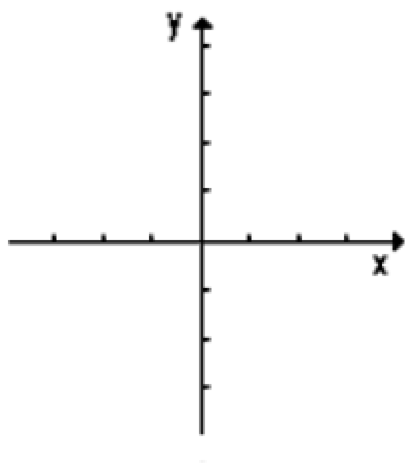
$$y = \frac{1}{.x - a}\text{; a} \in \text{IR} \setminus \{0\} \text{ e x} \neq \text{a}$$

3. **Famílias de funções**: $y = \frac{1}{.x - a}$; a $\in$ IR e x $\neq$ a

Usando a calculadora gráfica, faz um esboço das seguintes funções racionais:

3.1. $y = \frac{1}{x}$

$a =$ ___



3.1.1. Assinala a opção correta:

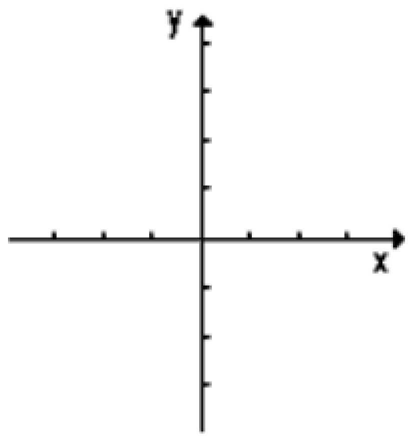
- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

3.1.2. O domínio da função é: _______________.

3.1.3. O contradomínio da função é: ____________.

3.2. $y = \frac{1}{x-3}$

$a =$ ___



3.2.1. Assinala a opção correta:

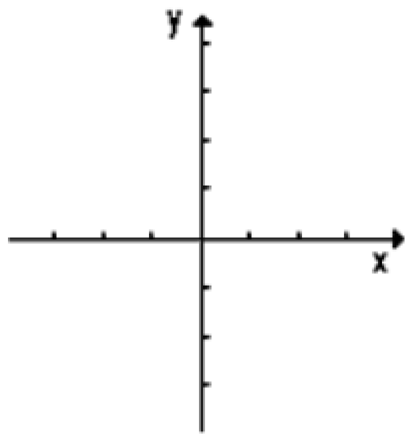
- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

3.2.2. O domínio da função é: _______________.

3.2.3. O contradomínio da função é: ____________.

3.3. $y = \dfrac{1}{x+3}$

$a =$ ___



3.3.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: ___

3.3.2. O domínio da função é: _______________.

3.3.3. O contradomínio da função é: ____________.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objetivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora			
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora			
Reconhecer as alterações no gráfico da função 1/x			
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico			
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico			

Anexo III - Segunda atividade de dia 13 de janeiro

Esta ficha de trabalho tem como objetivo analisar as características de funções racionais do tipo:

$$y = \frac{1}{.x - a};\ a \in \text{IR} \setminus \{0\} \text{ e } x \neq a$$

4. **Famílias de funções**: $y = \frac{1}{.x - a};\ a \in \text{IR e } x \neq a$

Usando a calculadora gráfica, e lápis de diferentes cores, faz um esboço das seguintes funções racionais:

4.1. $y = \frac{1}{x}$ (PRETO)

4.2. $y = \frac{1}{x-2}$ (VERMELHO)

4.3. $y = \frac{1}{x-4}$ (LARANJA)

4.4. $y = \frac{1}{x+3}$ (AZUL)

4.5. $y = \frac{1}{x+5}$ (VERDE)

4.5.1. O que podes concluir sobre o valor de a?

- Se o valor ***a*** for positivo, a função desloca-se para a ______________.
- Se o valor ***a*** for negativo, a função desloca-se para a ______________.
- O domínio *altera-se / não se altera.*
- O contradomínio *altera-se / não se altera*

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objetivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora			
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora			
Reconhecer as alterações no gráfico da função 1/x			
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico			
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico			

Anexo IV - Atividade de 3 de fevereiro

Problema 1 – Representação gráfica da função tipo $y = \frac{1}{x - a}$, para vários valores de *a*

Na página 1.4, segura no ponto ***a*** e arrasta-o para a esquerda e para a direita. Verifica que, conforme o valor de ***a*** se modifica, a equação e o gráfico atualizam.

1. **a.** Para que valor de x, a função $y = \frac{1}{x - 2}$ não se encontra definida?

Resposta: ______

b. Para que valor de x, a função $y = \frac{1}{x + 1}$ não se encontra definida?

Resposta: ______

c. Para que valor de x, a função $y = \frac{1}{x - a}$ não se encontra definida?

Resposta: ______

2. Conforme movimentas o ponto ***a*** ao longo do eixo dos xx´s, o sítio onde o gráfico da função $y = \frac{1}{x - a}$ tem uma falha, acompanha o mesmo movimento. Explica por que razão isto acontece.

3. Para que valor de x, o gráfico da função $y = \frac{1}{x - a}$ revela uma assimptota vertical?

Problema 2 – Exploração de um Triângulo

4. Observando a página 2.2 do problema, indica qual é o valor do y para cada um dos seguintes pontos:

(5,   ) (4,   ) (3.5,   ) (3.2,   ) (1,   )

5. Introduza 3,01 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ponto e puxa-o para baixo até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

6. Agora, introduz 2,99 para o valor do x do ponto *P*. Qual é o valor do y? Puxa o gráfico para cima até conseguires ver o ponto *P*.

7. **a.** Consegues que o valor do y do ponto *P* seja igual a 1000? Se sim, qual será o x do ponto *P*?

b. Consegues que o valor do y do ponto *P* seja igual a -1000? Se sim, qual será o x do ponto *P*?

8. Consegues criar o valor do y do ponto P tão grande quanto te pedirem? Como?

Problema 3 – Assintota Horizontal

9. Observando a página 3.2 do problema, indica qual é o valor do y para cada um dos seguintes pontos:

(5,   ) (13,   ) (23,   ) (103,   ) (1,   )

10. Introduza 503 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ponto e puxa-o para a esquerda até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

11. Introduza -497 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ponto e puxa-o para a direita até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objetivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas			
Movimentar os pontos na calculadora			
Identificar os valores do $\boldsymbol{a}$, no problema 1			
Identificar coordenadas dos pontos			
Tirar conclusões sobre as assintotas das funções racionais			

Anexo V - Atividade de 9 de março

Problema 1 – Modelação da função do tipo $y = \frac{b}{x}$, para vários valores de b

A fábrica do senhor Francisco produz parafusos para a montagem de computadores.

Quantos mais parafusos produzem, mais barato fica a sua produção.

Observa a tabela seguinte que relaciona o número de parafusos produzidos e o respetivo custo de produção:

Nº de parafusos (milhares)	1	2	4	5	8
Custo de produção (euros)	100	50	25	20	12,5

1. Abre o ficheiro “Modelação Matemática” e insere os valores observados numa tabela. Designa por “p” os valores da primeira coluna e “C” os valores da segunda coluna.

2. Representa os valores da tabela, num referencial, usando o mesmo ficheiro.

3. Agora, representa no mesmo gráfico funções do tipo $y = \frac{b}{x}$, mudando o valor de *b*, até que a função se encontre em cima dos pontos representados anteriormente na pergunta 2.

4. Agora, com a expressão que encontras-te, determina o custo, se o senhor Francisco produzir 10 mil parafusos.

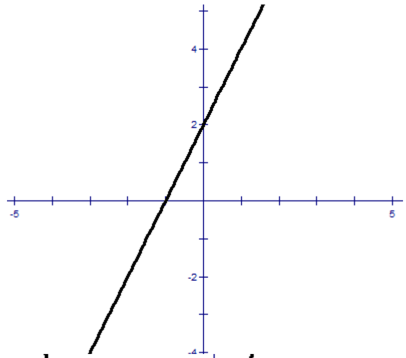
Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objetivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas			
Inserir os valores na calculadora			
Representar os pontos num gráfico, usando a calculadora			
Identificar a função correta que modela o problema			
Fazer previsões, usando o modelo encontrado			

Anexo VI - Atividade de 9 de maio

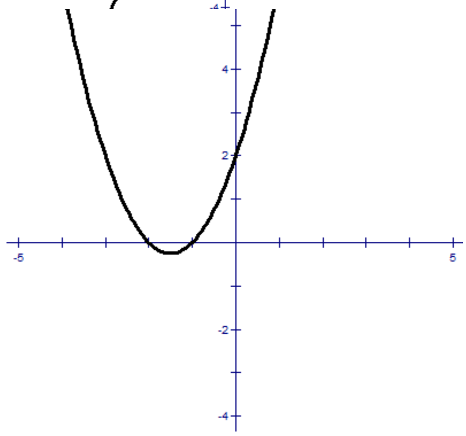
Modelo afim

Representação Analítica: $f(x) = ax + b$



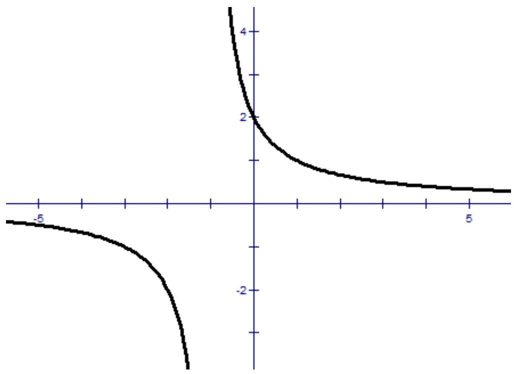
Modelo quadrático

Representação Analítica: $f(x) = ax^2 + bx + c$



Modelo Racional

Representação Analítica: $f(x) = \dfrac{a}{bx + c}$



Representa os pontos das seguintes tabelas no computador/calculadora, e escolhe o modelo que mais se parece com a distribuição dos pontos no gráfico.

X	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y	6	2	0	0	2	12	20	30

X	-2	0	3	9
y	3	1	0,5	0,25

X	0	2	3	5	7	8	9	10	11
y	1	5	7	11	15	17	19	21	23

Experimenta atribuir valores às letras a, b e c (entre 1 e 3) e identifica o modelo que representa cada conjunto de pontos.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objetivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas			
Inserir os valores na calculadora			
Representar os pontos num gráfico, usando a calculadora			
Identificar a função correta que modela o problema			

Esta ficha de trabalho tem como objetivo analisar as características de funções racionais do tipo:

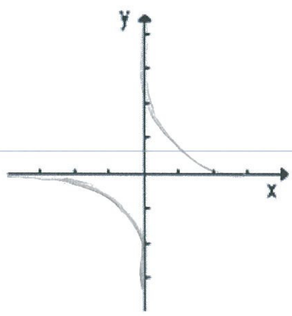
$$y=\frac{1}{ax},\ y=\frac{1}{ax^2}\ \ e\ \ y=\frac{1}{a(x-h)^2};\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

1. **Famílias de funções**: $y=\frac{1}{a.x}; a\in IR\setminus\{0\}$

   Usando a calculadora gráfica, faz um esboço das seguintes funções racionais:

1.1. $y=\frac{1}{2.x}$

$a = \underline{2} > 0$



1.1.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: X
- A função é crescente: ___

1.1.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

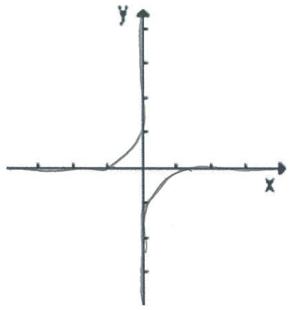
- *Se a > 0, então a função é* decrescente *em todo o seu domínio.*

1.1.3. O domínio da função é: $IR\setminus\{0\}$

1.1.4. O contradomínio da função é: $IR\setminus\{0\}$

1.2. $y = \frac{1}{-3.x}$

$a = \underline{-3} < 0$



1.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: _X_

1.2.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a < 0, então a função é* _crescente_ *em todo o seu domínio.*

1.2.3. O domínio da função é: _IR \ {0}_

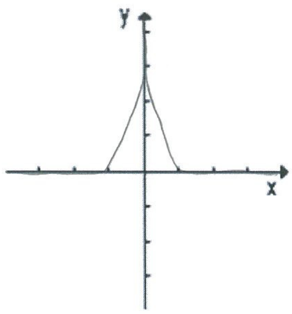
1.2.4. O contradomínio da função é: _IR \ {0}_

2. **Famílias de funções**: $y = \dfrac{1}{a.x^2}$; $a \in IR \setminus \{0\}$

Usando a calculadora gráfica, faz um esboço das seguintes funções racionais:

2.1. $y = \dfrac{1}{2.x^2}$

$a = \underline{2} > 0$



2.1.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: x
- A função é crescente: x

2.1.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

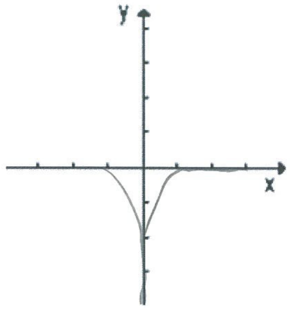
- *Se a > 0, então a função é ____________ em todo o seu domínio.* errado

2.1.3. O domínio da função é: $IR \setminus \{0\}$

2.1.4. O contradomínio da função é: R^+

2.2. $y = \dfrac{1}{-3.x^2}$

$a = \underline{-3} < 0$



2.2.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: _x_
- A função é crescente: _X_

2.2.2. Completa com uma das seguintes opções: crescente ou decrescente.

- *Se a < 0, então a função é* _____________ *em todo o seu domínio.* errado

2.2.3. O domínio da função é: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.2.4. O contradomínio da função é: $\mathbb{R}^-$

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora		X	
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora	X		
Reconhecer funções crescentes e decrescentes a partir do gráfico		X	
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico	X		
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico	X		

Esta ficha de trabalho tem como objetivo analisar as características de funções racionais do tipo:

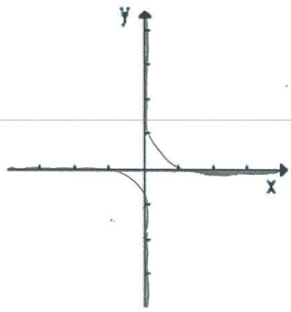
$$y = \frac{1}{x-a}; a \in IR \setminus \{0\} \text{ e } x \neq a$$

1. **Famílias de funções**: $y = \frac{1}{x-a}; a \in IR \text{ e } x \neq a$

   Usando a calculadora gráfica, faz um esboço das seguintes funções racionais:

1.1. $y = \frac{1}{x}$

$a =$ 0



1.1.1. Assinala a opção correta:

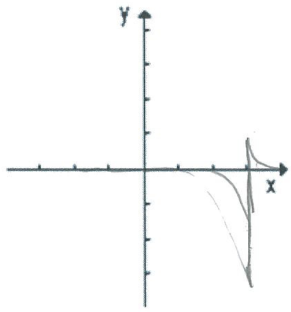
- A função é decrescente: X
- A função é crescente: ___

1.1.2. O domínio da função é: IR \ {0}.

1.1.3. O contradomínio da função é: IR \ {0}.

1.2. $y = \frac{1}{x-3}$

$a =$ -3



1.2.1. Assinala a opção correta:

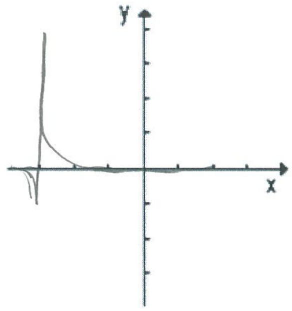
- A função é decrescente: ___
- A função é crescente: X

1.2.2. O domínio da função é: IR \ {3}.

1.2.3. O contradomínio da função é: IR \ {0}.

1.3. $y = \dfrac{1}{x+3}$

$a =$ 3



1.3.1. Assinala a opção correta:

- A função é decrescente: X
- A função é crescente: ___

1.3.2. O domínio da função é: IR \ {-3}.

1.3.3. O contradomínio da função é: IR \ {0}.

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora	X		
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora	X		
Reconhecer as alterações no gráfico da função 1/x	X		
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico	X		
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico	X		

Esta ficha de trabalho tem como objetivo analisar as características de funções racionais do tipo:

$$y=\frac{1}{.x-a};\, a\in \mathrm{IR}\setminus\{0\}\,\text{e}\ x\neq a$$

1. **Famílias de funções**: $y=\frac{1}{.x-a};\, a\in \mathrm{IR}\ \text{e}\ x\neq a$

   Usando a calculadora gráfica, e lápis de diferentes cores, faz um esboço das seguintes funções racionais:

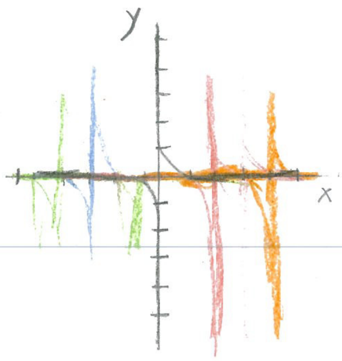
1.1. $y=\frac{1}{x}$ (PRETO)

1.2. $y=\frac{1}{x-2}$ (VERMELHO)

1.3. $y=\frac{1}{x-4}$ (LARANJA)

1.4. $y=\frac{1}{x+3}$ (AZUL)

1.5. $y=\frac{1}{x+5}$ (VERDE)



1.5.1. O que podes concluir sobre o valor de a?

- Se o valor ***a*** for positivo, a função desloca-se para a esquerda.
- Se o valor ***a*** for negativo, a função desloca-se para a direita.
- O domínio *altera-se / não se altera.*
- O contradomínio *altera-se / não se altera*

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Inserir as expressões das funções na calculadora	X		
Esboçar gráficos de funções a partir da calculadora	X		
Reconhecer as alterações no gráfico da função 1/x	X		
Identificar o domínio de uma função a partir do gráfico	X		
Identificar o contradomínio de uma função a partir do gráfico	X		

Problema 1 – Representação gráfica da função tipo $y = \dfrac{1}{x-a}$, para vários valores de *a*

Na página 1.4, segura no ponto ***a*** e arrasta-o para a esquerda e para a direita. Verifica que, conforme o valor de ***a*** se modifica, a equação e o gráfico atualizam.

1. **a.** Para que valor de x, a função $y = \dfrac{1}{x-2}$ não se encontra definida?

Resposta: 2

b. Para que valor de x, a função $y = \dfrac{1}{x+1}$ não se encontra definida?

Resposta: -1

c. Para que valor de x, a função $y = \dfrac{1}{x-a}$ não se encontra definida?

Resposta: a

---

2. Conforme movimentas o ponto ***a*** ao longo do eixo dos xx´s, o sítio onde o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x-a}$ tem uma falha, acompanha o mesmo movimento. Explica por que razão isto acontece.

3. Para que valor de x, o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x-a}$ revela uma assimptota vertical?

a

Problema 2 – Exploração de um Triângulo

4. Observando a página 2.2 do problema, indica qual é o valor do y para cada um dos seguintes pontos:

(5, 0.5) (4, 0.9) (3.5, 1.9) (3.2, 5.02) (1, -0.5)

5. Introduza 3,01 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ~~ponto~~ Gráfico e puxa-o para baixo até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

y = 98.083

6. Agora, introduz 2,99 para o valor do x do ponto *P*. Qual é o valor do y? Puxa o gráfico para cima até conseguires ver o ponto *P*.

Y = -98,07

7. **a.** Consegues que o valor do y do ponto *P* seja igual a 1000? Se sim, qual será o x do ponto *P*?

0.001

b. Consegues que o valor do y do ponto *P* seja igual a -1000? Se sim, qual será o x do ponto *P*?

-0,001

8. Consegues criar o valor do y do ponto P tão grande quanto te pedirem? Como?

Não sei

Problema 3 – Assimptota Horizontal

9. Observando a página 3.2 do problema, indica qual é o valor do y para cada um dos seguintes pontos:

(5, 0,48) (13, 0,09) (23, 0,05) (103, 0,01) (1, -0.5)

10. Introduza 503 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ponto e puxa-o para a esquerda até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

Y = 0,002

11. Introduza -497 para o valor do x do ponto P. Para onde foi o ponto? Agarra o ponto e puxa-o para a direita até conseguires ver o ponto P. Sê persistente, pois o ponto P está muito lá para cima!

Y = -0,002

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas	X		
Movimentar os pontos na calculadora	X		
Identificar os valores do ***a***, no problema 1	X		
Identificar coordenadas dos pontos	X		
Tirar conclusões sobre as assimptotas das funções racionais			X

Problema 1 – Modelação da função do tipo $y = \frac{b}{x}$, para vários valores de b

A fábrica do senhor Francisco produz parafusos para a montagem de computadores.

Quantos mais parafusos produzem, mais barato fica a sua produção.

Observa a tabela seguinte que relaciona o número de parafusos produzidos e o respetivo custo de produção:

Nº de parafusos (milhares)	1	2	4	5	8
Custo de produção (euros)	100	50	25	20	12,5

1. Abre o ficheiro "Modelação Matemática" e insere os valores observados numa tabela. Designa por "p" os valores da primeira coluna e "C" os valores da segunda coluna.

2. Representa os valores da tabela, num referencial, usando o mesmo ficheiro.

3. Agora, representa no mesmo gráfico funções do tipo $y = \frac{b}{x}$, mudando o valor de *b*, até que a função se encontre em cima dos pontos representados anteriormente na pergunta 2.

$y = \frac{100}{x}$

4. Agora, com a expressão que encontras-te, determina o custo, se o senhor Francisco produzir 10 mil parafusos.

$y = \frac{100}{10}$

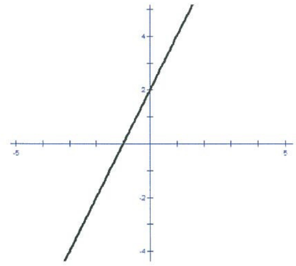
R: O custo é de 10 euros

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas		X	
Inserir os valores na calculadora	X		
Representar os pontos num gráfico, usando a calculadora	X		
Identificar a função correta que modela o problema		X	
Fazer previsões, usando o modelo encontrado		X	

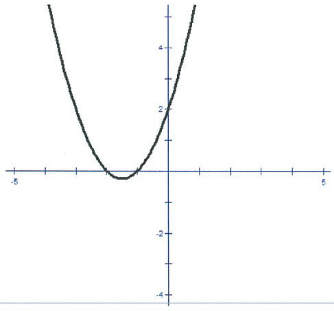
Modelo afim

Representação Analítica: $f(x) = ax + b$



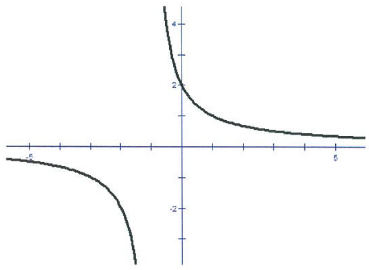
Modelo quadrático

Representação Analítica: $f(x) = ax^2 + bx + c$



Modelo Racional

Representação Analítica: $f(x) = \dfrac{a}{bx + c}$



Representa os pontos das seguintes tabelas no computador/calculadora, e escolhe o modelo que mais se parece com a distribuição dos pontos no gráfico.

X	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y	6	2	0	0	2	12	20	30

X	-2	0	3	9
y	3	1	0,5	0,25

X	0	2	3	5	7	8	9	10	11
y	1	5	7	11	15	17	19	21	23

Experimenta atribuir valores às letras a, b e c (entre 1 e 3) e identifica o modelo que representa cada conjunto de pontos.

$f_1(x) = 1x^2 + 3x + 2$

$f_2(x) = \frac{3}{1x+3}$

$f_3(x) = 2x + 1$

Avaliação dos Objetivos da Ficha:

Objectivo	Consegui fazer sozinho	Consegui fazer com ajuda	Não consegui fazer a ficha, mesmo com ajuda
Compreender as perguntas		X	
Inserir os valores na calculadora		X	
Representar os pontos num gráfico, usando a calculadora	X		
Identificar a função correta que modela o problema	X		